Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma Conjectura em Geometria de Distâncias na Esfera

Emerson Dutra[1]
IMECC/UNICAMP, Campinas, SP e IFMT, Cuiabá, MT
Jorge Alencar[2]
IFTM, Uberaba, MG
Carlile Lavor[3]
IMECC/UNICAMP, Campinas, SP

No trabalho *On the isometric embeddability of quadruples of points of* $\mathbb{R}^3$ *in the surface of a sphere (1933b)*, publicado por Kurt Gödel em 1933, encontramos o registro de um problema de Geometria de Distâncias (GD) que trata da realização sobre a superfície de uma esfera [3]. O problema foi proposto por Laura Klanfer durante um colóquio em 1933 e consistia em dado um conjunto de quatro pontos afimente independentes no espaço $\mathbb{R}^3$, e suas respectivas distâncias euclidianas, verificar a existência de um novo conjunto de pontos pertencentes à superfície de uma esfera, em $\mathbb{R}^3$, de modo que as distâncias geodésicas sejam iguais as distâncias euclidianas entre os pontos do conjunto inicialmente dado.

O resultado obtido por Gödel garante a realização de uma $4-$ *clique* realizável em $\mathbb{R}^3$ mas não em $\mathbb{R}^2$ na superfície de uma esfera $r\mathbb{S}^2$, para algum $r > 0$ [3]. Em 2016, os pesquisadores Leo Liberti, Grzegorz Swirszcz e Carlile Lavor publicaram o trabalho *Distance Geometry on the Sphere* que traz uma generalização do resultado obtido por Gödel [5], dado a seguir.

Teorema 1 (Generalização do Teorema de Gödel para Geometria de Distâncias)**.** *[5] Toda* $(K+1)-$ *clique* $G = (V, E, d)$ *ponderada, onde* $d : E \to \mathbb{R}_+$*, que é realizável em* $\mathbb{R}^K$ *mas não em* $\mathbb{R}^{K-1}$*, pode ser realizável em* $r\mathbb{S}^{K-1}$ *(para algum raio* $r > 0$*) com distâncias geodésicas.*

Em ambos os trabalhos ([3] e [5]), a demonstração considera que a realização do grafo ponderado pelas cordas existe para $\rho = \frac{1}{r} > 0$ suficientemente próximo de zero, justificada por argumentos de continuidade. Embora a demonstração formal não tenha sido apresentada, ou seja, existe um $\bar{\rho} \in \left(0, \frac{\pi}{\alpha}\right]$ tal que o grafo ponderado pelas cordas $G_\rho = (V, E, c_\rho)$, com $c_\rho : d \to \mathbb{R}_+$ definida por

$$c_\rho(d_{ij}) = \frac{2}{\rho} \sin\left(\frac{d_{ij}\rho}{2}\right), \tag{1}$$

sempre é realizável (com mesma dimensão de realização do grafo G) para $\rho \in [0, \bar{\rho}]$. Também é usado um argumento de ponto fixo para encontrar o raio que corresponde às geodésicas que têm o mesmo comprimento que as distâncias dadas [4]. Na Figura 1 são apresentadas as realizações do grafo G e do grafo G_ρ para $K = 3$.

[1]emersondutra.cba@gmail.com
[2]jorgealencar@iftm.edu.br
[3]clavor@unicamp.br

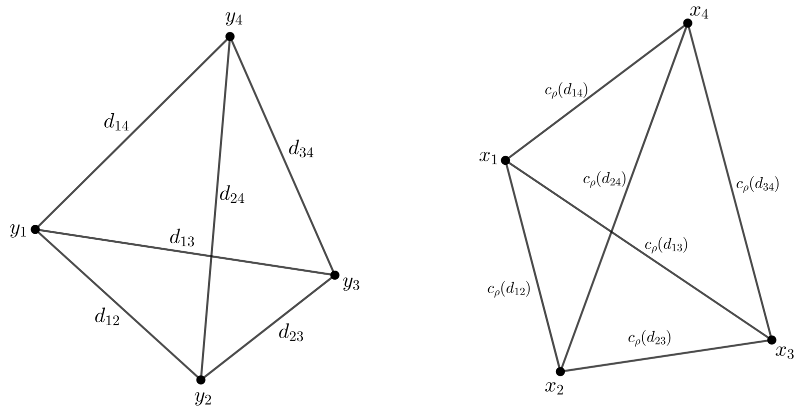

Figura 1: À esquerda a realização de uma 4−clique $G = (V, E, d)$ realizável no $\mathbb{R}^3$ mas não no $\mathbb{R}^2$ e à direita a realização do grafo ponderado pela função corda $G_\rho = (V, E, c_\rho)$.

Foram realizados testes computacionais e, para todos os grafos realizáveis no $\mathbb{R}^3$, mas não no $\mathbb{R}^2$, tomados de forma aleatória, obtivemos que o grafo ponderado pelas cordas G_ρ também era realizável no $\mathbb{R}^3$, mas não no $\mathbb{R}^2$, para $\rho \in \left(0, \frac{\pi}{\alpha}\right]$. Estendemos para $K > 3$ e continuamos a obter um grafo ponderado pelas cordas realizável e com a mesma dimensão de realização do grafo original. Tais resultados nos levaram a propor a conjectura a seguir.

Conjectura 1. *Seja $G = (V, E, d)$ uma $(K + 1)-$clique realizável em $\mathbb{R}^K$, mas não em $\mathbb{R}^{K-1}$, e $\rho \in \left(0, \frac{\pi}{\alpha}\right]$, onde $\alpha = \max_{\{i,j\}\in E} d_{ij}$. Então, o grafo $G_\rho = (V, E, c_\rho)$ é realizável em $\mathbb{R}^K$, mas não em $\mathbb{R}^{K-1}$.*

Como sequência do trabalho [1], onde exploraramos resultados obtidos por Kurt Gödel relacionados à Geometria de Distâncias em uma superfície esférica, desenvolvemos um algoritmo que determina o raio e a realização na esfera. Agora, estamos trabalhando na demonstração da validade da conjectura para $\rho < \bar{\rho}$ suficientemente pequeno. Além disso, continuamos investigando a validade da mesma para todo $\rho \in \left(0, \frac{\pi}{\alpha}\right]$.

Referências

[1] E. Dutra, J. Alencar e C. Lavor. "Geometria de Distâncias na Esfera". Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics.** v. 10.n. 1 (2023), pp. 010225–1.

[2] S. Feferman, J. W. Dawson Jr, S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay e J. Van Heijenoort. **Kurt Godel: Collected Works. Vol. 1: Publications 1929-1936**. Oxford University Press, Inc., 1986.

[3] K. Gödel. **On the isometric embeddability of quadruples of points of r_3 in the surface of a sphere**. In: Feferman et al. [2], pp. (1933b) 276-279.

[4] L. Liberti e C. Lavor. "Six mathematical gems from the history of distance geometry". Em: **International Transactions in Operational Research** 23.5 (2016), pp. 897–920.

[5] L. Liberti, G. Swirszcz e C. Lavor. "Distance geometry on the sphere". Em: **Discrete and Computational Geometry and Graphs: 18th Japan Conference, JCDCGG 2015, Kyoto, Japan, September 14-16, 2015, Revised Selected Papers**. Springer. 2016, pp. 204–215.

