Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo do Método de Euler em Problema do Decaimento Radioativo

Ingryd Carolly de Oliveira Medeiros[1] Anderson Carlos da Silva Morais[2] Gabriel Almeida Lima[3] Paulo César Linhares da Silva[4] Ivan Mezzomo[5]
DCME/UFERSA, Mossoró, RN
Lais de Queiroz da Silva[6]
DETI/UFC, Fortaleza, CE

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) são equações que envolvem derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente. Elas são encontradas em inúmeros problemas das ciências exatas e proporcionam modelos matemáticos que descrevem os fenômenos da natureza [3]. Na área da química, as EDO's surgem em diversos contextos, incluindo o decaimento radioativo. De acordo com [3], a EDO que descreve esse fenômeno é dado pela equação abaixo

$$\frac{dq}{dt} = -kq(t), \tag{1}$$

onde $q(t)$ representa a quantidade presente de massa do isótopo, t o tempo de desintegração e a constante k determina o tempo de meia-vida do elemento, que é uma característica intrínseca do mesmo. A solução analítica da Eq. (1) é $q(t) = q_0e^{-kt}$, onde q_0 é a quantidade inicial da massa do isótopo radioativo. Conforme destacado em [2], métodos numéricos surgem como alternativa para encontrar a solução de algumas EDO's, devido à complexidade de encontrar sua solução analítica. Um método numérico utilizado para resolver esse problema é o Método de Euler, também conhecido como Método da Reta Tangente, que utiliza o Método das Diferenças Finitas (MDF) para aproximar as derivadas.

O objetivo deste trabalho consiste em utilizar o Método de Euler em conjunto com o MDF para discretizar operadores diferenciáveis de primeira ordem e comparar as soluções obtidas pelos operadores discretizados com variação ao longo do tempo (t). O propósito é determinar qual abordagem se mostra mais eficaz e eficiente, na resolução da equação do decaimento radioativo.

O Método de Euler considera o polinômio de Taylor de primeira ordem para estimar $q_{i+1} = q_i + hf(t_i, q_i)$, onde h é o tamanho do passo e f é uma função que aproxima o valor da derivada. De acordo com [1], os operadores do Método de Euler utilizados para a discretização da Eq. (1) são progressivo, regressivo e trapézio, dadas pelas Eqs. (2), (3) e (4), respectivamente, onde $n = \dfrac{t - t_0}{h}$.

$$\Delta q_i = \frac{q_{i+1} - q_i}{h} = f(t_i, q_i), \quad i = 0, \ldots, n-1, \tag{2}$$

$$\nabla q_i = \frac{q_i - q_{i-1}}{h} = f(t_{i+1}, q_{i+1}), \quad i = 0, \ldots, n, \tag{3}$$

$$\delta q_i = \frac{\Delta q_i - \nabla q_i}{\frac{h}{2}} = (f(t_i, q_i) + f(t_{i+1}, q_{i+1})), \quad i = 0, \ldots, n-1. \tag{4}$$

[1] ingryd.medeiros@alunos.ufersa.edu.br
[2] anderson.morais92395@alunos.ufersa.edu.br
[3] gabriel.lima66961@alunos.ufersa.edu.br
[4] linhares@ufersa.edu.br
[5] imezzomo@ufersa.edu.br
[6] laisdequeirozdasilva@gmail.com

PROBLEMA: Considere um isótopo radioativo com uma taxa de decaimento de massa de 5% por hora e que, no instante inicial $t_0 = 0$, a massa do isótopo é de $q_0 = 100$ g. Queremos determinar a massa do isótopo radioativo (q_i), começando em t_0 e indo até $t_i = 8$ h, considerando que a constante de decaimento é $k = 0.0527$ e o tamanho do passo é $h = 0.5$.

Como critério de parada, foi utilizado o erro relativo com precisão de 10^{-3}, considerando 4 casas decimais. Na Tabela 1 consta os tempos de 0, 4 e 8 horas, bem como as soluções numéricas obtidas dos operadores discretizados, dados pelas Eqs. (2), (3) e (4). O algoritmo para a resolução do problema foi desenvolvido usando a linguagem Python3 em um computador com Processador Intel(R) Core(TM) i3-6006U CPU @ 2.00GHz 1.99 GHz, RAM 4GB, Sistema Operacional Windows 10 com HD 500GB e um SSD de 256GB.

Tabela 1: Comparação entre as soluções exatas e numéricas.

Tempo (t)	Exata	Progressivo	ER (%)	Regressivo	ER (%)	Trapézio	ER (%)
0	100.0000	100.000	0	100.000	0	100.000	0
4	80.9936	80.9932	0.0006	123.4672	52.4407	78.7630	2.7541
8	65.5996	65.5989	0.0011	152.4416	132.3817	56.5787	13.7515

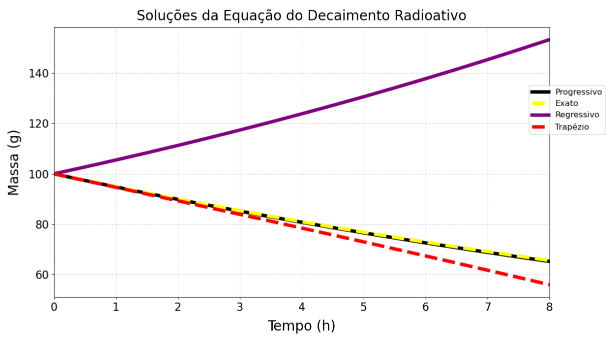

Figura 1: Gráfico do decaimento de massa $\times$ tempo em intervalos de 1 hora. Fonte: Autoria Própria 2024.

A análise da Tabela 1 evidencia que, entre as funções de discretização do Método de Euler, a função progressiva apresenta os resultados mais favoráveis, conforme a Figura 1, em que a função progressiva gera o resultado mais eficiente e eficaz, observado pela sobreposição das linhas com a solução exata. Em contrapartida, ocorre o resultado inverso na função regressiva. A abordagem se mostra promissora para a resolução de problemas neste campo de estudo.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da UFERSA e do CNPq na execução desta pesquisa.

Referências

[1] J. A. Cuminato e M. M. Junior. **Discretização de Equações Diferenciais Parciais**. 1a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. ISBN: 978-85-8337-005-5.

[2] M. A. Gomes e V. Lucia. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais.** 2a. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2008. ISBN: 978-85-34602-04-4.

[3] C. O. Santos. **Equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem modelagem matemática na área da física.** 1a. ed. Capivari de Baixo: Editora Univinte, 2023. ISBN: 978-65-87169-54-5.