

Um Modelo Biológico com Operador de Substituição

Ludmila P. Cavalcanti¹, Alex D. Ramos², Caliteia S. Sousa³
 UFPE, Pernambuco, PE

Na natureza há vários fenômenos que são descritos pela sua interação entre suas componentes (partículas). Como a formação de padrão das cores do pêlo de uma zebra, onde tal padrão é estabelecido pelas interações no nível celular. Para compreender tal comportamento utilizam-se várias ferramentas matemáticas, dentre elas, aquelas presentes nos sistemas de partículas interagentes.

Informalmente falando, os sistemas de partículas interagentes (SPI) possuem uma aleatoriedade presente em algum nível da evolução do sistema, ou seja, os estados de cada indivíduo são atualizados, obedecendo alguma regra probabilística. Suas aplicações são diversas, desde espalhamento de epidemias [4], modelagem de interações intercelular através de vias aéreas [1] até sistemas biológicos em geral [3]. Contudo, SPI tradicionais não comportam a hipótese do ambiente compor o processo de evolução, podendo variar com o tempo.

O modelo que estudamos é motivado pelo processo de síntese de uma nova fita na replicação do DNA onde podem ocorrer alterações no código genético. Mais especificamente, ele é um caso particular do modelo conhecido por expansão-modificação, proposto por [2]. Esse modelo tem como objetivo descrever o processo de atualização da sequência de DNA, em que pequenos segmentos de DNA são copiados e inseridos de modo consecutivo ao segmento original. Nesse cenário, tomamos uma sequência de zeros e uns, onde o zero corresponde a uma célula ativa e o um corresponde a uma célula que sofreu morte celular. Sobre as transformações no modelo, cada célula ativa sofre morte celular (modificação) ou reprodução celular (duplicação), e se a célula sofrer morte celular, ela irá permanecer no sistema sem nenhuma alteração.

Assim, utilizando a teoria de operadores de substituição [5]. Nós trabalhamos com o operador:

$$P : \begin{cases} 0 \rightarrow 1 & \text{com probabilidade } p. \\ 0 \rightarrow 0 & \text{com probabilidade } 1 - p. \\ 1 \rightarrow 1 \end{cases} \quad (1)$$

em que o 0 (zero) pode sofrer uma duplicação (expansão), com probabilidade $1 - p$, ou uma mutação (modificação) para o 1 (um), com probabilidade p , também conhecido como ponto de mutação.

Teorema 1. *O operador P , definido em (1), é consistente.*

Demonstração. Mostramos que para cada $V \in \text{dic}$, VP e $V(P_{conv} \circ P_{comp} \circ P_{descomp})$ possuem a mesma distribuição. Ainda, consideramos que $P \equiv P_{conv} \circ P_{comp} \circ P_{descomp}$, e com isso o resultado segue. \square

Teorema 2. *Seja p , a probabilidade descrita em (1):*

(a) *Se $p = 1$, então $\mu P = \delta_{1z}$, $\forall \mu \in \mathcal{M}$.*

(b) *Se $p = 0$, então:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu P^t = \begin{cases} \delta_{0z} & \text{se } \mu(0) > 0. \\ \delta_{1z} & \text{se } \mu(0) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

¹ludmila.cavalcanti@ufpe.br

²alex@de.ufpe.br

³caliteia.sousa@ufpe.br

Demonstração. Com base em resultados preliminares, para o item (a) substituímos $p = 1$. E para o item (b) mostramos que a sequência $\mu P^t(0)$ é monótona crescente e limitada, logo convergente. \square

Teorema 3. *Seja $p \in (0, 1)$. Em nosso processo, a medida δ_{1z} é invariante e, se $p < \frac{1}{2}$ e $\mu(0) = \frac{2p-1}{p-1} = f(p)$, então $\mu P(0) = \mu(0)$.*

Demonstração. Igualamos $\mu P(0)$ a $\mu(0)$, de modo que $f(p) \leq 0$ se e só se $p \geq \frac{1}{2}$. Portanto, se $p \geq \frac{1}{2}$, então $\mu P(0) = \mu(0)$ somente para $\mu(0) = 0$. \square

Teorema 4. *Seja p , a probabilidade descrita em (1). Para $p \geq \frac{1}{2}$, temos que P é ergódico.*

Demonstração. A evolução de cada $q_{V_i P^t}(0)$ pode ser associada a um processo de ramificação R_t^i , onde $R_0^i = 1$. E como os processos R_t^i são independentes, concluímos o resultado. \square

Teorema 5. *Seja p a probabilidade descrita em (1). Para $p < \frac{1}{2}$, P é não-ergódico. Além disso, para $\mu \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(0) > 0$, então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu P^t(0) = f(p). \quad (3)$$

Demonstração. Com base em resultados preliminares, mostramos que a distribuição inicial não converge para a distribuição invariante δ_{1z} . \square

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos o modelo matemático e sua formalização utilizando operadores de substituição. Demonstramos as suas principais propriedades: consistência, comportamento assintótico de μP^t quando $p \in [0, 1]$, ergodicidade e não ergodicidade.

Agradecimentos

Agradeço a CAPES pelo financiamento à pesquisa.

Referências

- [1] I. Dupin, E. Eyraud, É. Maurat, J. Sac-Épée e P. Vallois. “Probabilistic Cellular Automata modeling of intercellular interactions in airways : complex pattern formation in patients with Chronic Obstructive Pulmonary Disease”. Em: **Journal of Theoretical Biology** (2023), p. 111448. DOI: [10.1016/j.jtbi.2023.111448](https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2023.111448).
- [2] W. Li, T. G. Marr e K. Kaneko. “Understanding Long-Range Correlations in DNA sequences”. Em: **Physica D: Nonlinear Phenomena** 75.1 (1994), pp. 392–416. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(94\)90294-1](https://doi.org/10.1016/0167-2789(94)90294-1).
- [3] K. K. C. Lozano. “Autômatos Celulares Probabilísticos com Aplicações a Sistemas Biológicos”. Tese de doutorado. UFRJ/ COPPE, 2017.
- [4] G. Melotti. “Aplicação de Autômatos Celulares em Sistemas Complexos: Um Estudo de Caso em espalhamento de Epidemias”. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Minas Gerais, 2009.
- [5] A.V. Rocha, A.B. Simas e A. Toom. “Substitution Operators.” Em: **Journal of Statistical Physics** 143 (2011), pp. 585–618. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10955-011-0192-0>.