Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Resolução de Sistemas Lineares oriundos da Análise Estrutural utilizando o Método dos Elementos Finitos

Caroline G. Toscano[1]
DCETI/UFERSA, Angicos, RN
Matheus S. Menezes[2]
DCME/UFERSA, Mossoró, RN

Para obter a solução de problemas de análise estática de estruturas e sólidos utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF), é preciso obter a solução das equações que surgem na análise linear, que são do tipo, $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$, onde $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez, $\mathbf{u}$ é o vetor de deslocamento e $\mathbf{f}$ o vetor de carga do sistema de elementos finitos.

A precisão da análise de elementos finitos geralmente melhora com um refinamento maior da malha [1]. Isso leva os analistas a utilizarem sistemas de elementos finitos cada vez maiores para se aproximar da estrutura real. No entanto, o custo e a viabilidade prática de uma análise dependem dos algoritmos disponíveis para resolver os sistemas de equações resultantes [2]. O objetivo do trabalho proposto é apresentar a formulação e a aplicação comparativa entre o método direto de Cholesky, e o método dos Gradientes Conjugados, que é um método iterativo, em problemas oriundos de MEF por meio de experimentos computacionais.

O método de decomposição de Cholesky consiste na decomposição da matriz de rigidez, $\mathbf{K} = \mathbf{LL^t}$, onde $\mathbf{L}$ é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais positivos [3]. O cálculo dos termos da matriz $\mathbf{L}$ são obtidos de acordo com a Tabela 1.

Tabela 1: Termos da matriz $\mathbf{L}$.

l_{11}	l_{ii}	l_{i1}	l_{ij}
$\sqrt{k_{11}}$	$\left(k_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}{}^2\right)^{1/2}$	$\dfrac{k_{i1}}{l_{11}}$	$\dfrac{(k_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot l_{jk})}{l_{jj}}$

Depois de calculada a matriz $\mathbf{L}$, para obter a solução do sistema de equações lineares, resolve-se o seguinte par de sistemas lineares triangulares:

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{f} \text{ e } \mathbf{L^t u} = \mathbf{y} \tag{1}$$

O Método dos Gradientes Conjugados, aplicado à resolução do sistema linear é o mesmo vetor $\mathbf{u}$ que minimiza a Equação (2) ou (3):

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{Ku} \tag{2}$$

$$\prod = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{u^t K u} - \mathbf{u^t f} \tag{3}$$

onde $\mathbf{r}$ é o resíduo e, na mecânica estrutural, $\prod$ é energia potencial. O gradiente de $\prod$ é $-\mathbf{r}$, sendo assim $\mathbf{r}$ é a direção de descida mais íngreme de um vetor aproximado $\mathbf{u}$. O Método dos Gradiente Conjugados utiliza direções de busca $\mathbf{p}$ próximas às direções de descida mais íngreme, sujeitas à restrição de que os vetores $\mathbf{p}$ são conjugados; isto é, ortogonal a $\mathbf{K}$, o que significa que $\mathbf{p_i^t K p_j} = 0$ para $i \neq j$. A solução é uma soma ponderada dos vetores $\mathbf{p}$.

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{p_1} + \alpha_2 \mathbf{p_2} + ... + \alpha_m \mathbf{p_m} \tag{4}$$

[1]caroline.toscano@ufersa.edu.br
[2]matheus@ufersa.edu.br

Nos experimentos variou-se o tamanho do sistema, usando três matrizes esparsas, sendo duas delas extraídas da coleção *Matrix Market* [4]. Com estes estudos, pretende-se inferir situações onde é preferível utilizar cada uma das técnicas supracitadas, como também indicar vantagens e desvantagens a partir das características das matrizes.

O problema PP envolve a aproximação por elementos finitos para um pórtico plano com 3 graus de liberdade por nó, resultando em uma matriz de tamanho 12×12, real, simétrica e definida positiva (RSDP), com diagonal dominante (DD). Nos problemas $NOS1$ e $NOS3$, a análise é da aproximação por elementos finitos do operador biharmônico em estruturas diferentes. No $NOS1$, em uma viga com uma extremidade livre e outra fixa, usando 80 elementos com 3 graus de liberdade por nó, resultando em uma matriz de tamanho 237×237, RSDP, 1017 elementos não nulos acima e abaixo da diagonal. No problema $NOS3$, em uma placa retangular com um lado fixo e os outros livres, resultando em uma matriz de tamanho 960×960, RSDP, com 15844 elementos não nulos acima e abaixo da diagonal. Ambas as matrizes são esparsas e têm a diagonal dominante.

Os métodos foram implementados no GNU OCTAVE, versão 7.1.0, em um notebook com com processador Intel core i7-7500U, com 8GB RAM DDR4, SSD 256GB e sistema operacional Windows 10.

Na análise dos resultados para o Método dos Gradientes Conjugados, foram considerados o número de iterações, a precisão alcançada (distância máxima e relativa), o resíduo máximo e o tempo de execução. Para o Método de Fatoração de Cholesky, foram considerados o erro máximo de fatoração, o resíduo máximo e o tempo de execução.

Tabela 2: Resultados dos métodos dos Gradientes Conjugados e de Fatoração de Cholesky.

Método dos Gradientes Conjugados					
Problema	**Iterações**	**D. Máxima**	**D. Relativa**	**R. Máximo**	**Tempo**
PP	13	0,00	0,00	1,00 E-08	0,025 s
NOS1	928	0,00	1,00 E-08	3,43 E-06	0,189 s
NOS3	232	1,00 E-07	1,00 E-08	7,98 E-06	0,0577 s
Método de Fatoração de Cholesky					
Problema	**Erro Máximo de Fatoração**		**Resíduo Máximo**		**Tempo**
PP	0,00		0,00		0,014 s
NOS1	2,4 E-07		0,00		23,08 s
NOS3	0,00		0,00		1589,22 s

Os resultados indicam que, para ambos os problemas, houve precisão nos resultados. No entanto, conforme aumenta o número de graus de liberdade e, consequentemente, a matriz de rigidez, o Método de Cholesky torna-se mais lento. Por outro lado, o Método dos Gradientes Conjugados mostrou-se altamente eficiente para todos os problemas, especialmente para os maiores. Em comparação com o tempo de execução do terceiro problema, o Método dos Gradientes Conjugados foi aproximadamente 27 mil vezes mais rápido que o Método de Cholesky.

Referências

[1] K. J. Bathe. **Finite Element Procedures**. Prentice Hall, 1996.

[2] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha e R. J. Witt. **Concepts and applications of finite element analysis**. Hoboken: Jon Wiley & Sons, 2002.

[3] N. Franco. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Prentice Hall, 2011.

[4] **Matrix Market - Um repositório visual de dados de teste para uso em estudos comparativos de algoritmos para álgebra linear numérica**. `http://math.nist.gov/MatrixMarket/`. Acessado em 21/06/2019.