Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Comparação Numérica entre os Métodos do Gradiente Ponderado com Atraso e Resíduos Conjugados

Elivandro O. Grippa[1] Roberto Andreani[2]
UNICAMP, Campinas, SP
Leonardo D. Secchin[3]
UFES, São Mateus, ES

Neste trabalho, estamos interessados em resolver o seguinte problema de otimização convexa:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x, \tag{1}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica e definida positiva e $b \in \mathbb{R}^n$. Sabemos que resolver tal problema corresponde a encontrar a solução do sistema linear $Ax = b$. Ao longo dos anos, diversos métodos foram desenvolvidos [8], entre eles alguns diretos; i.e., métodos que nos fornecem a solução exata (a menos de erros de arredondamento) em um certo número fixo de operações, e os métodos iterativos os quais focamos nesse trabalho. Os métodos iterativos consistem em gerar uma sequência que aproxima a solução.

Quando há muitas variáveis, aplicar métodos diretos pode ser inviável dado que tais métodos demandam memória considerável e têm custo computacional significativo. Em contrapartida, métodos iterativos são menos custosos, mesmo que a solução encontrada não seja a exata, mas sim uma aproximação seguindo alguma medida viável.

Talvez o método iterativo mais famoso, e muito utilizado na prática, é o de Gradientes Conjugados (GC) [3] devido a sua robustez e convergência finita. Em 2019, Leon [4] propôs o chamado Método do Gradiente ponderado com atraso (do inglês, DWGM), que se mostrou superior ao GC em testes computacionais no que diz respeito ao número de iterações e tempo computacional, ainda que tenha um custo por iteração ligeiramente maior. Outras análises foram realizadas considerando essa competitividade, como, por exemplo, o estudo das propriedades das sequências geradas pelo DWGM [2], extensão para funções fortemente convexas [1] e uma generalização que acomoda toda uma família de métodos, desde o GC até o DWGM [5]. Outro método da mesma classe do GC (i.e., baseado em direções conjugadas) é o de Resíduos Conjugados (RC) [8, 9], menos discutido na literatura, mas com bons resultados teóricos e desempenho similar ao GC.

Mediante o estudo das propriedades do DWGM e do RC, concluímos que as sequências geradas pelos métodos são equivalentes em aritmética exata, cuja demonstração utiliza a teoria de subespaços de Krylov. É importante salientar que este resultado não é recente. Em 1970, Luenberguer [6] apresentou o *método de triangulação*, inspirado no método das tangentes paralelas (ver [7, Seção 9.7]). Este método é matematicamente equivalente ao RC e tem estrutura idêntica ao DWGM. Em outras palavras, apesar da iteração do DWGM ser implementada em dois passos, os métodos DWGM e RC são matematicamente idênticos. O método de triangulação foi muito pouco explorado (de fato, mesmo em [6] ele é apresentado de forma secundária), até sua redescoberta, de forma independente, por Leon com seu DWGM. Assim, não há, pelo menos de nosso conhecimento, uma

[1]elivandro.grippa@gmail.com
[2]andreani@unicamp.br
[3]leonardo.secchin@ufes.br

comparação numérica robusta entre os métodos de triangulação (DWGM) e RC. Nesse sentido, o objetivo desse trabalho é apresentar parte do estudo teórico e testes computacionais realizados, averiguando o desempenho do RC e do DWGM em problemas mal-condicionados. Para os testes, consideramos as matrizes oriundas da coletânea *Suite Sparse Matrix Collection* (SSMC) mantidas pela Universidade da Flórida. Testes preliminares mostraram uma superioridade do método RC quando uma alta precisão de parada (pela norma do gradiente de f) é exigida.

Agradecimentos

Este trabalho teve o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) em processo de número 22/15197-3.

Referências

[1] R. Andreani, H. F. Leon, M. Raydan e L. D. Secchin. “An extended delayed weighted gradient algorithm for solving strongly convex optimization problems”. Em: **Journal of Computational and Applied Mathematics** 416 (2022), pp. 114525-1–19. DOI: 10.1016/j.cam.2022.114525.

[2] R. Andreani e M. Raydan. “Properties of the delayed weighted gradient method”. Em: **Computational Optimization and Applications** 78 (2020), pp. 167–180. DOI: 10.1007/s10589-020-00232-9.

[3] M. R. Hestenes e E. Stiefel. “Methods of conjugate gradients for solving linear systems”. Em: **Journal of Research of the National Bureau of Standards** 49 (1952), pp. 409–436. DOI: 10.6028/jres.049.044.

[4] H. F. Leon. “A delayed weighted gradient method for strictly convex quadratic minimization”. Em: **Computational Optimization and Applications** 74 (2019), pp. 729–746. DOI: 10.1007/s10589-019-00125-6.

[5] H. F. Leon, R. Andreani e M. Raydan. “A family of optimal weighted conjugate-gradient-type methods for strictly convex quadratic minimization”. Em: **Numerical Algorithms** 90 (2021), pp. 1225–1252. DOI: 10.1007/s11075-021-01228-0.

[6] D. G. Luenberger. “The conjugate residual method for constrained minimization problems”. Em: **SIAM Journal on Numerical Analysis** 7 (1970), pp. 390–398. DOI: 10.1137/0707032.

[7] D. G. Luenberger e Y. Ye. **Linear and Nonlinear Programming**. 5ª ed. Califórnia: Springer Cham, 2021. ISBN: 978-3-030-85450-8.

[8] Y. Saad. **Iterative Methods for Sparse Linear Systems**. 2ª ed. Filadélfia: Society for Industrial e Applied Mathematics, 2003. ISBN: 978-0-89871-534-7.

[9] E. Stiefel. “Relaxationsmethoden bester strategie zur lösung linearer gleichungssysteme”. Em: **Commentarii Mathematici Helvetici** 29 (1955), pp. 157–179. DOI: 10.1007/bf02564277.

