Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Uma Aplicação de Programação Semidefinida Não Linear ao Problema de Identificação de Fatores de Risco

Alfred J. D. Albon[1]
Unifesp, São José dos Campos, SP
Daiana O. Santos[2]
Unifesp, Osasco, SP

Programação Semidefinida Não Linear (PSDNL) é uma área de pesquisa que consiste em minimizar uma função objetivo cujas restrições do problema pertencem ao cone das matrizes semidefinidas positivas. Em PSDNL estamos interessados em resolver o seguinte problema

$$\begin{aligned} &\underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{Minimizar}} \quad f(x) \\ &\text{sujeito a} \quad\ \ g(x) \in \mathbb{S}^m_+, \end{aligned} \tag{PSDNL}$$

onde as funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^m$ são continuamente diferenciáveis, $\mathbb{S}^m$ é o conjunto das matrizes simétricas e $\mathbb{S}^m_+$ o cone das matrizes semidefinidas positivas. Detalhes da teoria envolvida no problema podem ser vistos em [4]. Um dos motivos do crescente interesse em PSDNL está no fato de este possuir aplicações em diferentes campos de estudo, em [1] os autores introduzem condições de otimalidade para o problema em questão e analisam resultados de convergência para o algoritmo de Lagrangiano aumentado. A seguir, vamos descrever um problema em economia, mais especificamente na identificação de fatores de risco financeiro, que pode ser tratado como um PSDNL, introduzido em [2].

O problema de identificação de fatores de risco envolve a decomposição de uma matriz de covariância em duas matrizes semidefinidas positivas, permitindo assim a obtenção de informações sobre o tipo de risco presente.

Grande parte das ferramentas utilizadas na análise de risco, com o objetivo de obter informações sobre os tipos de risco presentes em uma matriz de covariância, baseiam-se em modelos estatísticos. Dentre esses modelos estatísticos, podemos citar o PCA (Principal Component Analysis). Recentemente, têm-se utilizado métodos de otimização para realizar essa decomposição, fornecendo métodos mais robustos e menos suscetíveis a outliers.

Considerando Σ uma matriz de covariância, gostaríamos de ter $\Sigma = \mathcal{L} + \mathcal{W}$ onde $\mathcal{L}$ é uma matriz semidefinida positiva de posto baixo e $\mathcal{W}$ é uma matriz esparsa e semidefinida positiva. Uma abordagem para este problema, utilizando otimização convexa, requer resolver o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\underset{(\mathcal{L},\mathcal{W})}{\text{Minimizar}} \quad \lambda\|\mathcal{L}\|_* + \gamma\|\mathcal{W}\|_1 + \|\mathcal{L} + \mathcal{W} - \Sigma\|_F^2 \\ &\text{sujeito a} \quad\ \ \mathcal{L}, \mathcal{W} \succeq 0, \end{aligned} \tag{P}$$

onde $\lambda > 0$ e $\gamma > 0$ são parâmetros de regularização que controlam o posto e a esparsidade da solução. A norma $\|\cdot\|_*$ é a norma nuclear, dada pela soma dos valores singulares da matriz em

[1]alfred_james_dias@outlook.com
[2]daiana.santos@unifesp.br

questão, cuja minimização induz posto baixo, enquanto $\|\cdot\|_1$ é a norma ℓ_1, que induz esparsidade, enquanto $\|\cdot\|_F$ é a norma de Frobenius. Observe que o problema (P) é um problema de otimização semidefinida não linear.

Em trabalhos recentes, nos quais o caso convexo é considerado e essa abordagem utilizando otimização é empregada, o algoritmo ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers) tem sido proposto para resolver o problema (P). O ADMM é uma variação do método do Lagrangiano Aumentado que se mostrou altamente eficaz quando a função objetivo pode ser escrita como uma soma de funções [3], por exemplo:

$$\begin{array}{ll} \underset{x}{\text{Minimizar}} & f(x)+g(x) \\ \text{sujeito a} & (A+B)x=b \end{array}$$

pode ser reformulado como

$$\begin{array}{ll} \underset{(x,y)}{\text{Minimizar}} & f(x)+g(y) \\ \text{sujeito a} & Ax+By=b \\ & x=y \end{array}$$

O propósito deste estudo é duplo: implementar um algoritmo ADMM para abordar o problema (P) e avaliar os resultados obtidos, contrastando-os com os que seriam fornecidos pelo PCA em uma análise de risco de uma carteira de investimentos, por exemplo.

Referências

[1] R. Andreani, G. Haeser e D. S. Viana. "Optimality conditions and global convergence for nonlinear semidefinite programming". Em: **Mathematical Programming** 180 (2020), pp. 203–235. DOI: 10.1007/s10107-018-1354-5.

[2] J. R. Bohn, L. R. Goldberg e A. D. Shkolnik. **Identifying broad and narrow financial risk factors with convex optimization**. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=2800237. 2016.

[3] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu et al. "Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers". Em: **Foundations and Trends in Machine Learning** 3.1 (2011), pp. 1–122. DOI: 10.1561/2200000016.

[4] F. Jarre. "Elementary optimality conditions for nonlinear SDPs". Em: **Handbook on Semidefinite, Conic and Polynomial Optimization**. Springer, 2012, pp. 455–470.