Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Jogos de Coloração de Grafos com Dois Turnos

Eder F. Figueiredo[1] Vinicius F. dos Santos[2]
DCC/UFMG, Belo Horizonte, MG

Diversos problemas práticos podem ser modelados como problemas combinatórios. Em geral, não é possível controlar todas as variáveis presentes na aplicação em questão. Tais variáveis podem se manifestar como adversidades, comprometendo a confiabilidade dos resultados dos modelos. Jogos combinatórios fornecem um arcabouço robusto para abordar essas situações. Nesse cenário, um jogador denominado "adversário" incorpora as adversidades, e o desfecho desse jogo pode ser interpretado como "o melhor resultado possível diante de todas as adversidades enfrentadas".

O **jogo de coloração** consiste em, dado um grafo G e um conjunto finito de cores C, dois jogadores, Alice e Bob, tomam turnos colorindo os vértices de G, de forma que no término de cada jogada a coloração parcial resultante seja válida, isto é, que vértices adjacentes possuam cores distintas. O jogo termina quando não existem mais jogadas possíveis. Alice vence caso todos os vértices do grafo estejam coloridos e Bob vence caso contrário. O **número cromático de jogo** $\chi_g(G)$ é o menor número k de cores tal que Alice possui estratégia vencedora. Este jogo foi introduzido por Gardner [2] como coloração de mapas, e formalizado por Bodlaender [1] para grafos gerais.

Consideraremos uma generalização apresentada em [3]. Na entrada, além de G e C, recebemos também dois inteiros não negativos a e b. Em vez de colorir apenas um vértice por turno, Alice e Bob tentam colorir respectivamente a e b vértices (ou os vértices restantes, caso não haja vértices suficientes). Este jogo ficou conhecido como jogo **assimétrico** de coloração, e de forma análoga à versão simétrica, temos o **(a, b)−número cromático de jogo** do grafo $\chi_g(G; a, b)$. Seja G um grafo, C um conjunto finito de cores e $a, b \leq |V(G)|$ inteiros não negativos, a notação para representar um jogo de dois turnos com estes parâmetros é $(G; a, b, |C|)$. Tanto na versão simétrica quanto na versão assimétrica, a maior parte dos estudos na literatura focam em limitantes para o número cromático de jogo.

Neste trabalho, consideramos o caso particular de **jogos de dois turnos**, onde recebemos um grafo G com n vértices e no qual $a + b = n$, denotado por $J_a = (G; a, n - a, |C|)$. A seguir, caracterizamos os grafos para os quais Alice possui estratégia vencedora quando $a = 0$ e $a = 1$.No que segue, seja G um grafo e $v \in V(G)$. Denotamos por $N(v)$ a vizinhança de v e por $d(v)$ o grau de v, ou seja $d(v) = |N(v)|$. Denotamos por $\Delta(G)$ o grau máximo de G.

Teorema 1. *Seja G um grafo com n vértices e C um conjunto de cores. Bob possui estratégia vencedora J_0 se e somente se existe $v \in V(G)$ com grau $d(v) \geq |C|$.*

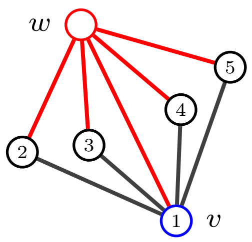
Teorema 2. *Seja G um grafo com n vértices e C um conjunto de cores. Existe estratégia vencedora para Alice em J_1 se e somente se os vértices de grau máximo são gêmeos falsos, e existe vértice v com $d(v) = \Delta(G)$ tal que para todo w com $d(w) \geq |C|$, $w \notin N(v)$ e $N(w) \subseteq N(v)$.*

As Figuras 1 e 2 ilustram a necessidade das condições do Teorema 2.

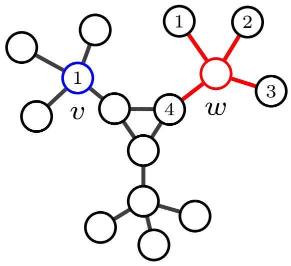
É possível também generalizar os teoremas anteriores para J_k, com k constante, e também utilizá-los para decidir o vencedor de J_k em tempo $\mathcal{O}(k^k n^{k+\frac{7}{2}})$, que decidimos omitir por restrições de espaço.

---

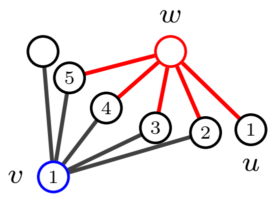
[1]ederfgd@dcc.ufmg.br
[2]viniciussantos@dcc.ufmg.br



(a) Vértices de grau máximo são vizinhos e $|C| = 5$.

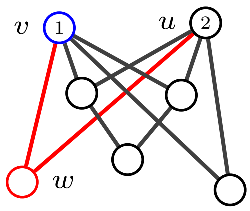


(b) Vértices de grau máximo não possuem vizinhos em comum e $|C| = 4$.

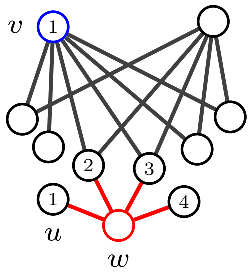


(c) Vértices de grau máximo possuem vizinhos em comum, mas suas vizinhanças são distintas, e $|C| = 5$.

Figura 1: Bob consegue vencer quando os vértices de grau máximo não são gêmeos falsos. Nos três casos Alice jogou a cor 1 no vértice v. Fonte: dos autores.



(a) Instância com $|C| = 2$. Note que $d(w) = |C|$ e w é vizinho dos vértices de grau máximo



(b) Instância com $|C| = 4$. Novamente $d(w) = |C|$ mas sua vizinhança não está contida na vizinhança dos vértices de grau máximo.

Figura 2: Bob consegue explorar os vértices com $d(w) \geq |C|$. Novamente, considere que Alice jogou a cor 1 no vértice v. Fonte: dos autores.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), projetos 312069/2021-9, 406036/2021-7 e 404479/2023-5 e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), projetos APQ-01707-21 e PCE-00006-24.

Referências

[1] H. Bodlaender. "On the Complexity of Some Coloring Games." Inglês. Em: **Int. J. Found. Comput. Sci.** 2 (1991), pp. 133–147.

[2] M. Gardner. "Mathematical games". Inglês. Em: **Scientific American** 244 (1981), pp. 18–26.

[3] H. A. Kierstead. "Asymmetric graph coloring games". Em: **Journal of Graph Theory** 48.3 (2005), pp. 169–185. DOI: `https://doi.org/10.1002/jgt.20049`.