Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Shift Bilateral Como Sistema Dinâmico Caótico

Renan L. Gomes[1] Pouya Mehdipour[2]
UFV, Viçosa, MG

Considerando a conjunção de caos e ordem na natureza e na vida humana, o estudo de tais fenômenos e a compreensão de seu comportamento podem ser muito valiosos. Um exemplo caótico é o crescimento bacteriano em doenças infecciosas como o coronavírus, que demonstrou o quanto complicou a vida humana. O matemático Henri Poincaré é conhecido como o pioneiro da teoria do caos. Ele percebeu tal fenômeno na década de 1880, enquanto estudava o problema dos três corpos no contexto de um sistema solar.

Certas complexidades dinâmicas e sensibilidade às condições iniciais são algumas das principais características de caos. Esses comportamentos podem ser estudados por meio da codificação da dinâmica caótica, usando como ferramenta, a dinâmica simbólica.

Neste projeto, pretendemos estudar noções introdutórias de sistemas dinâmicos discretos, dinâmica simbólica, caos e fractais. Mais precisamente, além de estudar as bases matemáticas necessárias, pretende-se conhecer os modelos fractais clássicos e sua relação com a autossimilaridade e a dinâmica simbólica (shift bilateral). Pretendemos também conhecer e estudar o caos determinístico: sensibilidade à condição inicial, expansividade, propriedade de mixing e pontos periódicos, usando a conjugação topológica com dinâmica do shift bilateral, que é um exemplo de sistema dinâmico caótico. As principais referências utilizadas são [1] e [2].

Um **sistema dinâmico** é uma função contínua (ou homeomorfismo i.e. uma bijeção contínua) que descreve a evolução no tempo de elementos em um dado espaço, chamado de espaço de fase. Em vários casos o espaço fase pode ser um espaço métrico cuja a definição vem a seguir.[1]

Definição 1. *Um espaço métrico é um conjunto X com uma noção de distância d entre seus pares de pontos. Se $d : X \times X \to [0, +\infty)$ satisfazer as três condições abaixo, então temos uma métrica:*

- $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

e o par (X, d) chama-se de espaço métrico e $B(x, \epsilon) := \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$ para $\epsilon > 0$ é uma vizinhança de x.

Definição 2 (Órbita de x e pontos períodicos)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico e $f : X \to X$ um sistema dinâmico. A órbita de $x \in X$, descreve a história da evolução de x ao longo do tempo, ou seja, o caminho percorrido no futuro ou passado.*

$$O(x) = \{x, f(x), f(f(x)), ...\} = \bigcup_{n \in N} f^n(x).$$

Quando existe um menor elemento n tal que $f^n(x) = x$, o ponto x é dito um ponto periódico.

[1]renan.d.gomes@ufv.br
[2]pouya@ufv.br

Definição 3 (Órbita densa)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico e $f : X \to X$ um sistema dinâmico. A órbita de x é densa no X, se para toda vizinhança $B(x, \epsilon) \subset X$ existe $n > 0$ tal que $f^n(x) \in B(x, \epsilon)$.*

De maneira análoga, diremos que um conjunto A é denso em X, se para toda vizinhança $B(x, \epsilon) \subset X$, temos $A \cap B(x, \epsilon) \neq \emptyset$.

Definição 4 (Sensibilidade)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico e $f : X \to X$ um sistema dinâmico. Diremos que f tem sensibilidade à condição inicial, $\delta > 0$, se existe algum y em qualquer vizinhança de x, e um $n \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.*

Definição 5 (Expansividade)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico e $f : X \to X$ um sistema dinâmico homeomorfismo. Diremos que f é expansivo com constante de expansividade $\delta > 0$, se para qualquer $x \neq y$ existe algum n inteiro tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.*

Definição 6. *Seja (X, d) um espaço métrico e $f : X \to X$ um sistema dinâmico. f é um sistema dinâmico caótico se:*

- *tem sensibilidade à condição inicial;*
- *conjunto $Per(f)$ de pontos periódicos de f é denso em X;*
- *tem órbita densa.*

Proposição 1. *Seja (X, d) um espaço métrico e $f : X \to X$ um sistema dinâmico homeomorfismo. Se f for expansivo, então tem sensibilidade à condição inicial.*

Proposição 2. *Se $f : X \to X$ for um homeomorfismo expansivo, então f tem sensibilidade à condição inicial.*

Seja $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. A aplicação $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ dada a seguir é uma métrica em X.

$$d(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^{|i|}}.$$

Definição 7 (Shift Bilateral)**.** *Sistema dinâmico $f : X \to X$ tal que $[f(x)]_i = x_{i+1}$ é chamado de shift bilateral.*

Proposição 3. *[2] O shift bilateral é um homeomorfismo.*

Teorema 1. *O shift bilateral é um exemplo de sistema dinâmico que apresenta expansividade e comportamento caótico.*

Agradecimentos

Manifestamos nossa gratidão à FAPEMIG pelo apoio financeiro concedido.

Referências

[1] A. T. Baravieira e F. M. Branco. **Sistêmas Dinâmicos: uma primeira visão**. Instituto de Matemática, UFRGS.

[2] D. Lind e B. Marcus. **An introduction to symbolic dynamics and coding**. 1st. ed. New York: Cambridge University Press, 1995. ISBN: 0521551242.

