Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análise de Regras Compostas de ACEs de Classes I e I de Wolfram

Luiz C. A. Albuquerque[1] Paula T. M. Gibrim[2] Pouya Mehdipour[3]
UFV, Viçosa, MG

Autômatos celulares são idealizações matemáticas de sistemas físicos nos quais tempo e espaço são discretos e que possuem quantidades discretas e finitas de valores. Consiste, então, em uma matriz, ou grade, de células nas quais sua evolução se dá em espaços discretos de tempo. Cada célula é caracterizada por um estado pertencente a um conjunto finito de estados e evolui de acordo com regras que dependem somente do seu estado e do estado de um número finito de vizinhos. É importante mencionar que, na maior parte dos casos, a evolução de um autômato celular é irreversível, uma vez que vários conjuntos de estados podem levar a uma mesma evolução.

Um **autômato celular** é uma quíntupla da forma $C = (\mathcal{L}, \mathcal{S}, c, n, \mathcal{R})$ tal que:

- **Grade de Células:** é um conjunto de células de tamanho $\mathcal{L}$ e pode ter tamanho finito ou infinito
- **Conjunto de Estados:** $\mathcal{S}$ é um conjunto finito de estados
- **Configuração Inicial:** c é uma associação específica dos estados nas células de uma grade de células
- **Vizinhança:** $\mathcal{N}$ é um conjunto das células adjacentes à esquerda e à direita de uma célula do meio. Definimos uma métrica $d : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathbb{N}$ onde $d(a, b) = |b - a| = n$ e a e b referem-se à posição destas células. Sendo assim, a vizinhança seria a bola $B_n(a)$, de centro a e raio n
- **Regra local:** $\mathcal{R}$ é uma aplicação $\mathcal{R} : \mathcal{S}^{2n+1} \to \mathcal{S}$ onde n representa o raio da vizinhança

A **configuração** c de um autômato celular é uma aplicação $c : \mathbb{Z}^d \to \mathcal{S}$ que especifica o estado de cada célula de uma grade de células. O conjunto de todas as possíveis configurações de uma grade é representado por $\mathcal{C}$. Se c for uma função constante, o que levaria todas as células a um mesmo estado, chamamos de **configuração trivial**. As regras locais aplicadas nas vizinhanças de uma célula levam-nos até um sistema dinâmico que chamamos de **função de transição global** $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, onde $G(c) = e$ é uma nova configuração em $\mathcal{C}$. O grupo dos ACs nos quais $d = 1$, $n = 1$ e $|S| = 2$ são chamados de **Autômatos Celulares Elementares (ACE)**. Durante este trabalho, estudaremos apenas modelos elementares, de forma que os estados de valor 0 correspondem às células brancas e 1, às pretas. [1]

Sejam G_1 e G_2 duas funções de transição global com as respectivas regras locais f_1 e f_2 de ACEs dadas com o mesmo conjunto de estados. A composição $G_1 \circ G_2$ também é uma função de transição global. Chamamos de **composição de ACEs** com q funções de transição global, se existem q regras locais $f_1, \ldots, f_q$ tais que a função de transição global será $\overline{G} = G_1 \circ G_2 \circ \cdots \circ G_q$. Neste trabalho estudamos **composições de ACEs** que contêm duas funções de transição global.

[1]lcaa@ufv.br
[2]paula.gibrim@ufv.br
[3]pouya@ufv.br

Wolfram percebeu que os comportamentos das evoluções dessas regras poderiam ser agrupados em quatro grupos diferentes: classe I (homogênea), II (periódica), III (caótica) e IV (complexa).

Neste trabalho estudamos a composição de duas regras, consideramos autômatos celulares $C = (\mathcal{L}, \mathcal{S}, c, n, \mathcal{R})$ com as seguintes características: $\mathcal{L} = 150$, $\mathcal{S} = \{0, 1\}$, c aleatório (sendo escolhidos uma amostra de 20 configurações diferentes), $n = 1$ e $\mathcal{R}$ sendo uma composição na qual suas regras locais são um arranjo das regras de Wolfram pertencentes à classe I, tomadas duas a duas e obtivemos como resultado principal, o seguinte teorema:

Teorema 0.1. Todas as composição de ACEs de classe I com classe I de Wolfram pertencem a classe homogênea (classe I) ou classe periódico (classe II).

Agradecimentos

Agradeçemos a FAPEMIG pelo apoio financeiro.

Referências

[1] J. Kari. "Theory of cellular automata: A survey". Em: **Theoretical Computer Science** 334 (2005), pp. 3–33. DOI: 10.1016/j.tcs.2004.11.021.