

Método da Homogeneização Assintótica Aplicado a um Cilindro Sólido Elástico com Seção Transversal Elíptica

Luiz G. da S. Pereira,¹ Reinaldo R. Ramos,² Panters R. Bermúdez,³ Jorge A. R. Durán⁴
MCCT/EEIMVR-Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, RJ

Resumo. Neste trabalho abordamos o **Método da Homogeneização assintótica** para produzir uma **Solução Assintótica Formal** (SAF) de segunda ordem, usada como aproximação para a solução da equação de equilíbrio de um cilindro heterogêneo de múltiplas camadas em regime elástico, utilizando também a lei de Hooke como auxílio. A partir destes, são determinados os coeficientes efetivos e é proposta a formulação matemática do problema homogeneizado. A análise se estende para diferentes números de camadas, a fim de verificar como a solução se comporta para cada uma. Por fim, diferentes simulações numéricas são realizadas para a resolução das equações diferenciais, com o intuito de demonstrar a aproximação entre a SAF e a solução analítica.

Palavras-chave. Homogeneização Assintótica, Mecânica dos sólidos, Modelagem Matemática e Computacional.

1 Introdução

Este trabalho apresenta o **Método da Homogeneização Assintótica** (MHA), que é um dentre os diversos métodos de homogeneização utilizados extensivamente nas áreas de matemática, engenharia e ciência dos materiais por sua alta eficiência e precisão quando se trata da análise de sólidos heterogêneos com estrutura micro-periódica [1], quando comparado com outros métodos como, por exemplo, o **método de elementos finitos** [2]. O método facilita a solução de problemas envolvendo diversas categorias de compósitos, como o caso do projeto de estruturas piezoelétricas planas [4] e a avaliação das propriedades termoelásticas efetivas do concreto [3], ao fornecer um problema homogêneo equivalente com coeficientes efetivos no lugar daqueles rapidamente oscilantes. Sabendo disso, este método foi escolhido para a solução das equações diferenciais que descrevem o deslocamento de um sólido heterogêneo de seção transversal elíptica com múltiplas camadas periódicas. Para a apresentação dos resultados foi escolhido o caso de 2 camadas, objetivando de não incrementar a complexidade já presente neste tipo de geometria. Por fim, os resultados foram comparados com o caso cilíndrico, ou seja, quando a excentricidade da seção elíptica tende a 0.

2 Abordagem do Problema

2.1 Equações Fundamentais

Primeiramente foi desenvolvido o método utilizando coordenadas cilíndricas, partindo da equação de equilíbrio e da lei de Hooke [5], sob a suposição que o material permanece no regime linear

¹luizgsp@id.uff.br

²reinaldorr@id.uff.br

³pantersrb@id.uff.br

⁴jorgeduran@id.uff.br

elástico. É introduzido também um parâmetro geométrico pequeno $\varepsilon = \frac{l}{L} \ll 1$, que representa a estrutura periódica da microescala, onde l e L representam as dimensões características da micro e macro-escala do sólido respectivamente. A equação de equilíbrio (1) e a relação de Cauchy [5] podem ser escritas como

$$\nabla \cdot \sigma + f = 0, \quad \epsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T), \quad (1)$$

sendo σ o tensor de tensões, f o vetor das forças volumétricas resultantes que atuam sobre a barra, ϵ o tensor de deformações e u o vetor deslocamento, que é nosso objetivo. Trazendo a equação de equilíbrio apresentada nas equações (1) para o sistema de coordenadas polares, obtêm-se,

$$\frac{1}{r} \frac{d(r\sigma_r^\varepsilon)}{dr} + f_r^\varepsilon = 0, \quad \sigma_r^\varepsilon = (2\mu_r^\varepsilon + \lambda_r^\varepsilon) \frac{\partial u_r^\varepsilon}{\partial r}, \quad (2)$$

onde μ_r^ε é o módulo de cisalhamento e λ_r^ε a constante de Lamé. Ressalte-se que as variáveis que apresentam o índice ε representam o problema original. Unindo a equação de equilíbrio com a lei de Hooke, ambas apresentadas na equação (2), obtemos a equação original na qual o método de homogeneização será aplicado,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rC_r^\varepsilon \frac{\partial u_r^\varepsilon}{\partial r} \right) + f_r^\varepsilon = 0, \quad (3)$$

onde C_r^ε foi utilizado para substituir a soma dos coeficientes μ_r^ε e λ_r^ε , apresentados na equação (2). Deve-se evidenciar que a equação (3) satisfaz as condições de contorno $u_r^\varepsilon|_{\Gamma_u} = u^0$ e $\sigma_r \cdot n|_{\Gamma_t} = u^1$, sendo Γ_u e Γ_t os contornos (ver Figura 1), onde u^0 e u^1 são funções prescritas.

2.2 Método de Homogeneização Assintótica

Para o início do processo de homogeneização, propõe-se uma solução assintótica formal (SAF) para o problema heterogêneo, de modo a aproximar a solução original,

$$u^{(2)}(r, \varepsilon) = u_0(r, y) + \varepsilon u_1(r, y) + \varepsilon^2 u_2(r, y). \quad (4)$$

Aqui é introduzida uma nova variável $y = \frac{r}{\varepsilon}$, chamada variável rápida, que acompanha a microescala do material. Substituindo a equação (4) em (3), encontra-se o seguinte,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[rC(y) \left(\frac{du_0(r, y)}{dr} + \varepsilon \frac{du_1(r, y)}{dr} + \varepsilon^2 \frac{du_2(r, y)}{dr} \right) \right] - f(r, y) = 0. \quad (5)$$

Aplicando a regra da cadeia na equação (5) e separando em potências de ε que não resultem em indeterminação quando $\varepsilon \rightarrow 0$, chega-se a,

$$\varepsilon^{-2} : \frac{\partial}{\partial y} \left(C(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = 0, \quad (6)$$

$$\varepsilon^{-1} : \frac{\partial}{\partial y} \left(C(y) \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rC(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = 0, \quad (7)$$

$$\varepsilon^0 : \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rC(y) \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C(y) \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rC(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) - f(r, y) = 0. \quad (8)$$

Já para a solução das equações (6), (7) e (8), foi utilizado o lema encontrado em [1], que garante a existência de solução para equações lineares com coeficientes rapidamente oscilantes. Com isso, solucionando a equação (6), chegamos a

$$u_0 = u_0(r). \tag{9}$$

O problema local possui uma grande importância, pois é o que descreve o comportamento da célula unitária do corpo, obtido após realizar uma separação de variáveis na equação (7), fazendo com que $u_1(r, y) = N_1 \frac{du_0}{dr}$, chegando então em,

$$\frac{d}{dy} \left(C(y) \frac{dN_1(y)}{dy} + C(y) \right) = 0. \tag{10}$$

Que é chamado **problema local**. Utilizando novamente o lema sobre a existência e unicidade de [1], obtemos também,

$$N_1 = \int_0^y \left(\frac{\hat{C}}{C(y)} - 1 \right) dy, \quad u_1 = \frac{du_0}{dr} \int_0^y \left(\frac{\hat{C}}{C(y)} - 1 \right) dy, \tag{11}$$

$$\hat{C} = \left\langle C(y)^{-1} \right\rangle^{-1}, \tag{12}$$

O parâmetro apresentado na equação (12) é conhecido como o **coeficiente efetivo** do problema estudado, onde $\langle \cdot \rangle$ é o operador **valor médio**, definido conforme o seguinte,

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\cdot) dV = \frac{1}{At} \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\theta)} (\cdot) r dr d\theta dz = \frac{1}{A} \int_A (\cdot) dA, \tag{13}$$

onde A denota a área do corpo de seção elíptica, t sua espessura e V o volume total do sólido. Com isso, o coeficiente efetivo pode ser reescrito, pois cada camada é individualmente homogênea tendo seus respectivos valores C_1 e C_2 para o coeficiente de rigidez, ou seja,

$$\frac{1}{\hat{C}} = \frac{1}{A} \left(\int_{A_1} \left(\frac{1}{C_1} \right) dA + \int_{A_2} \left(\frac{1}{C_2} \right) dA \right) = \frac{1}{A} \left(\frac{A_1}{C_1} + \frac{A_2}{C_2} \right). \tag{14}$$

Por fim, resolvendo a equação (8) aplicando o valor médio em ambos os lados e pelo lema de [1] chega-se finalmente em,

$$\frac{\hat{C}}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_0}{dr} \right) = \langle f(r, y) \rangle, \tag{15}$$

que resolvido nos dá o resultado da função u_0 , que é o termo mais significativo da SAF e irá ditar o comportamento do corpo na macro-escala. A equação (15) é conhecida como **problema homogeneizado**. A equação (15) deve satisfazer as condições de contorno $u_0|_{\Gamma_u} = f^0$ e $\sigma_r(u_0) \cdot n|_{\Gamma_t} = f^1$, onde f^0 e f^1 são funções prescritas.

3 Análise dos Resultados Numéricos

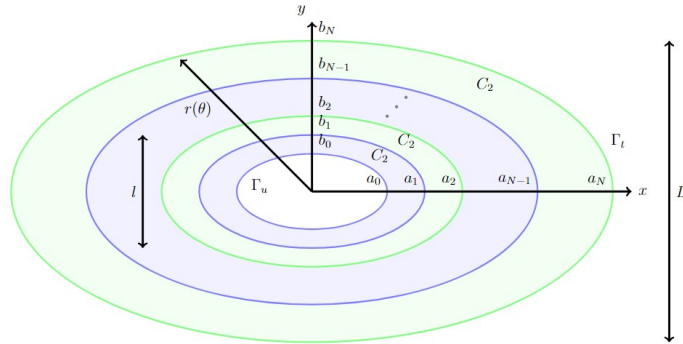


Figura 1: Corpo de estudo heterogêneo de N camadas com seção transversal elíptica e semi-eixo maior a_i e menor b_i , com $i = 1, 2, \dots, N$. Fonte: Próprio.

Como dito anteriormente, para a solução das principais equações (10), (11), (12) e (15) foi utilizado o software Mathematica e, com ele, fez-se os gráficos dos resultados, variando os diversos parâmetros inclusos no problema. Para fins de validação dos resultados, foi também resolvida a equação analítica (3), que foi apresentada juntamente com a equação homogênea (15), e foram escolhidos os valores que maximizam a diferença. Neste caso foi utilizado para a função $C(r)$, que define a variação da rigidez ao longo da seção do compósito, uma função definida por partes, cujo valor efetivo é 42.63 GPa, para representar a mudança de camadas. Os materiais escolhidos foram o aço para a camada interna e o concreto para a externa. A função $f(r, \varepsilon) = \cos(10\pi \frac{r}{\varepsilon})$ foi escolhida como a função de solitação externa.

$$C(r) = \begin{cases} 0 & r \leq 0 \\ 262GPa & r < r_1(\theta), \quad \hat{C} = 42.63GPa, \\ 33GPa & r < r_2(\theta) \end{cases} \quad (16)$$

sendo que,

$$r_i(\theta) = \frac{a_i b_i}{\sqrt{(a_i \sin \theta)^2 + (b_i \cos \theta)^2}}, \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

Como se pode observar na equação (17), teremos uma variação da solução com o ângulo na elipse, logo, foi escolhido o valor $\theta = 4.8$ radianos para a apresentação dos resultados. Observe-se também que foram utilizados os módulos de Young do aço (200 GPa) e do concreto (30 GPa) e seus respectivos coeficientes de Poisson [5]. Estes podem ser relacionados com $C(y)$ da seguinte forma,

$$C(y) = \frac{E(y)}{1 - 2\nu(y)} \left(\frac{1 - \nu(y)}{1 + \nu(y)} \right) \quad (18)$$

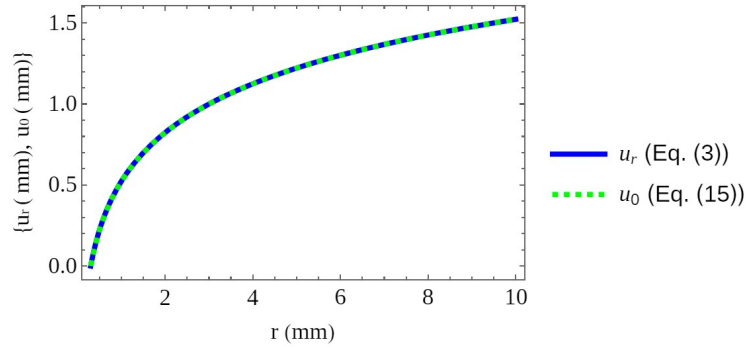


Figura 2: Variação do valor do deslocamento u em função da distância r até a origem para a barra compósita de seção transversal elíptica com 2 camadas. Fonte: Próprio.

Tabela 1: Comparação entre as soluções.

ε	Solução Homogeneizada (mm) Eq. (15)	Solução Original (mm) Eq. (3)	$ \Delta u $ (mm)
1	0.318	0.347	0.028
1/2	0.318	0.322	0.004
1/10	0.318	0.321	0.002

Na Figura 2 temos a comparação entre a solução da equação homogeneizada (15) e da original (3) para diferentes valores de r , e para um compósito elíptico com semieixos $a_1 = 3mm$ e $b_1 = 2mm$, para a camada interna e $a_2 = 9mm$ e $b_2 = 4mm$ para a externa. Os cálculos da equação homogeneizada foram feitos para as condições de contorno $u_0(2) = 0$ e $u_0(4) = 1$. Na Tabela 1 podemos verificar a aproximação entre a solução homogeneizada (15) e a original (3) para alguns valores de ε .

Outra análise realizada foi a dependência do coeficiente efetivo com o a excentricidade da elipse, a fim de relacionar o resultado atual com o caso de um corpo com seção circular. Para isso, a fórmula (12) foi reescrita em função das propriedades de cada camada e da geometria,

$$\hat{C} = \frac{C_1 C_2}{v_1(C_2 - C_1) + C_1}, \tag{19}$$

onde,

$$v_1 = \frac{V_1}{V} = \frac{\pi a_1 b_1 L}{\pi a_2 b_2 L} = \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}, \quad v_2 = \frac{V_2}{V} = \frac{\pi a_2 b_2 L - \pi a_1 b_1 L}{\pi a_2 b_2 L} = \frac{a_2 b_2 - a_1 b_1}{a_2 b_2}, \tag{20}$$

considerando que,

$$v_1 + v_2 = 1, \quad v_1 = 1 - v_2, \tag{21}$$

onde, v_1 e v_2 são as **frações volumétricas** para o caso de um corpo de 2 camadas, para as camadas interna e externa respectivamente. É possível escrever a área da face elíptica (A) em termos da excentricidade e e do semieixo maior a é,

$$A = a^2 \pi \sqrt{1 - e^2}. \tag{22}$$

Usando a fórmula (22), a equação (22) pode ser reescrita como,

$$v_1 = \frac{V_1}{V} = \frac{a_1^2 L \pi \sqrt{1 - e_1^2}}{a_2^2 L \pi \sqrt{1 - e_2^2}} = \frac{a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2}}{a_2^2 \sqrt{1 - e_2^2}}, \tag{23}$$

ou seja, para um corpo de camadas elípticas com a mesma excentricidade, ocorre a simplificação do termo $\sqrt{1 - e^2}$, fazendo com que a fração volumétrica seja independente da excentricidade e idêntica ao caso circular com raios $r_1 = a_1$ e $r_2 = a_2$. Portanto, para que houvesse uma análise independente para o caso elíptico, foram escolhidas elipses com excentricidade do tipo $\sqrt{1 - (\alpha e)^2}$ com $0 \leq \alpha \leq 1$, sendo que α denota o fator de escala da face elíptica interna para diferenciar as duas elipses.

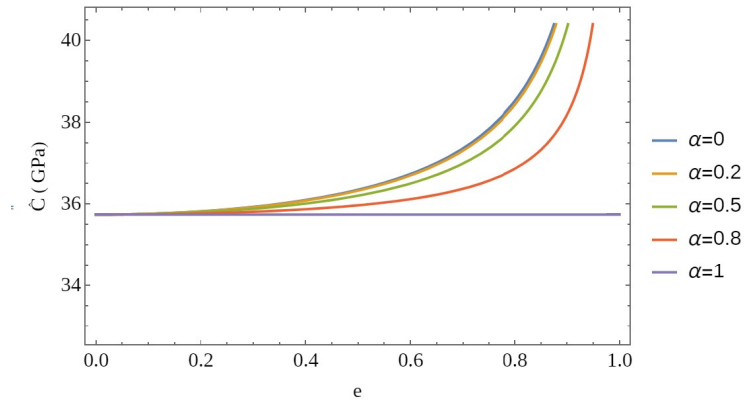


Figura 3: Coeficiente efetivo em função da excentricidade (e). Foram usados os valores para o fator de escala (α), onde $\alpha = \frac{\min(e_i, e_j)}{\max(e_i, e_j)}$, $i, j = 1, 2$, indicados na figura. Fonte: Próprio.

O coeficiente efetivo na Figura 3 é bem próximo do caso circular quando e está próximo de 0. Isso se infere da fórmula (23), pois tanto e_1 quanto e_2 se aproximam de 0, e a fração volumétrica se reduz a a_1^2/a_2^2 , que seria idêntico a um círculo de raio interno a_1 e raio externo a_2 . Já quando e tende a 1, temos as duas elipses (interior e exterior) tendendo a um segmento de reta, fazendo o coeficiente efetivo tender um valor fixo. A seguir vê-se a curva do coeficiente efetivo em função do fração volumétrica. Verificou-se também que este comportamento é o mesmo que para o caso de um compósito cilíndrico com seção transversal circular com as mesmas propriedades.

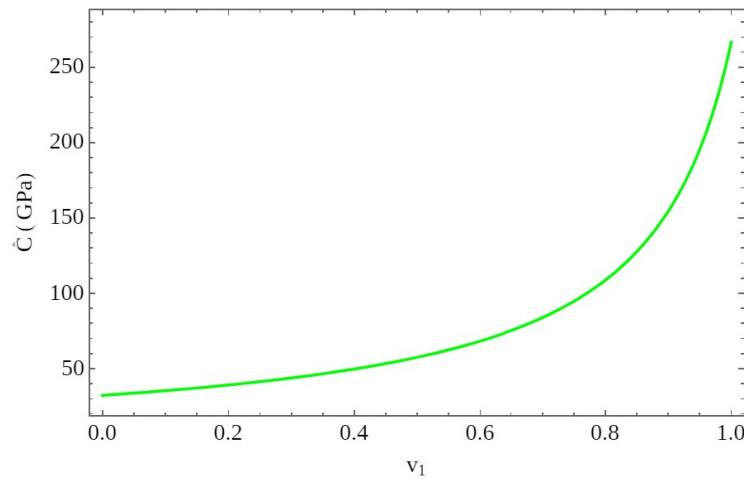


Figura 4: Coeficiente efetivo em função da fração volumétrica, utilizando os mesmos materiais utilizados na Figura 2. Fonte: Próprio.

4 Considerações Finais

Conforme o conteúdo apresentado neste trabalho, vê-se a eficiência e precisão do Método da Homogeneização Assintótica em 2 escalas em coordenadas cilíndricas para um corpo de seção transversal elíptica, considerando a simplicidade da solução homogênea em comparação com a original. Também foi visto o cálculo dos coeficientes efetivos, que contribuem para a solução homogeneizada, retirando a rápida oscilação do meio heterogêneo. Com isso, foi observado também que, em geral, o coeficiente efetivo depende da excentricidade da elipse. Entretanto, caso as camadas possuam faces com semieixos de mesma excentricidade, temos a independência do coeficiente efetivo com a excentricidade.

Agradecimentos

Ao CNPq pela bolsa de iniciação científica PIBIC-IC230091 “Modelagem matemática e computacional de materiais compostos”; A meus orientadores por me apoiar durante todo o processo. RRR agradece Chamada CNPq N^o 09/2023 PQ-2 PRODUTIVIDADE EM PESQUISA, processo n.º 307188/2023-0 e ao EDITAL UFF PROPI n.º 05/2022, PPG-MCCT da Universidade Federal Fluminense, Brasil.

Referências

- [1] N. S. Bakhvalov e G. Panasenko. **Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media: Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials**. Mathematics and its Applications. Springer Netherlands, 1989, pp. 12–31. ISBN: 9780792300496.
- [2] Y. Chen e J. Guo. “Effective property of piezoelectric composites containing coated nano-elliptical fibers with interfacial debonding”. Em: **Applied Mathematics and Mechanics** 43.11 (nov. de 2022), pp. 1701–1716. DOI: 10.1007/s10483-022-2918-9.
- [3] Z. J. Dong, W. Quan, X. Ma, X. Li e J. Zhou. “Asymptotic homogenization of effective thermal-elastic properties of concrete considering its three-dimensional mesostructure”. Em: **Computers & Structures** 279 (abr. de 2023), p. 106970. DOI: 10.1016/j.compstruc.2022.106970.
- [4] Z. He, J. Liu e Q. Chen. “Higher-order asymptotic homogenization for piezoelectric composites”. Em: **International Journal of Solids and Structures** 264 (2023), p. 112092. ISSN: 0020-7683. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.112092>.
- [5] M. H. Sadd. **Elasticity: Theory, Applications, and Numerics**. Academic Press, 2009. ISBN: 9780080922416.