

Markowitz Nominal *versus* Robusto: Uma Comparação Considerando Ações do Mercado Brasileiro

Gislaine A. Pericaro¹, Dirceu Scaldelai², Juliano F. da Mota³, Solange R. dos Santos⁴

UNESPAR, Campo Mourão, PR

Tatiane Cazarin da Silva⁵

DAMAT/UTFPR, Campo Mourão, PR

Resumo. Este trabalho realiza uma comparação entre o desempenho do modelo de Markowitz em duas versões nominais, e uma abordagem robusta, aplicados ao mercado de ações brasileiro, durante o período de 2010 a 2023. Foram considerados retornos semanais das ações presentes no Índice Brasil 100 (IBrX 100) durante o período analisado, com estratégia de rebalanceamento quadrimestral e inclusão de custos de transação. O desempenho das carteiras foi medido usando métricas de composição e diversidade, assim como comparações em relação ao mercado. Os resultados indicam que embora as carteiras obtidas pelo modelo robusto sejam mais esparsas, essas apresentam uma relação entre retorno e risco mais vantajosa quando comparadas ao Ibovespa e às carteiras obtidas pelo modelo nominal e pela carteira ingênua, ou seja, aquela com pesos iguais para todos os ativos.

Palavras-chave. Portfólios financeiros. Teoria de Markowitz. Otimização robusta.

1 Introdução

A teoria moderna de portfólio, introduzida por Harry Markowitz em 1952 [7], é amplamente reconhecida como um marco fundamental na gestão de investimentos. Seu modelo clássico proporcionou uma estrutura matemática para a construção ótima de carteiras, equilibrando retornos esperados e riscos associados. No entanto, desde sua concepção, essa teoria tem sido objeto de intensa pesquisa e desenvolvimento, resultando em diversas variantes e abordagens aprimoradas, bem como aplicações a diversos mercados financeiros [5, 10, 12].

Apesar de sua ampla utilização e reconhecimento, o modelo clássico de Markowitz possui suas limitações bem documentadas. Uma das principais limitações reside na suposição de que os retornos esperados e as covariâncias entre os ativos são conhecidos com precisão. Uma maneira simples, e muito empregada na prática, consiste em calcular, a partir de dados históricos de retornos dos ativos, a média e a covariância amostrais como estimativas para esses parâmetros. No entanto, diversos estudos demonstram que tal abordagem leva a estimativas imprecisas dos pesos ideais dos ativos em uma carteira, comprometendo a eficácia da otimização [2].

As incertezas associadas ao retorno esperado dos ativos podem ser incorporadas no modelo de otimização da carteira por meio da abordagem de Otimização Robusta, que considera como solução ótima robusta um ponto que permaneça viável para todas as possíveis realizações dos parâmetros incertos. Esta abordagem dá origem a subproblemas, denominados contraparte robusta, os quais

¹gislaine.pericaro@ies.unespar.edu.br

²dirceu.scaldelai@ies.unespar.edu.br

³juliano.mota@unespar.edu.br

⁴solange.regina@ies.unespar.edu.br

⁵tatianecazarin@utfpr.edu.br

substituem as formulações determinísticas levando em consideração as incertezas. Tal abordagem vem sendo bastante aplicada no contexto da otimização de portfólios de investimentos [3, 4, 6, 9, 11]. Faz-se então necessário analisar os benefícios da aplicação prática dos modelos robustos aos mercados financeiros. Nesse contexto, este artigo propõe uma comparação entre o desempenho do modelo de Markowitz, em duas versões nominais e outra abordagem robusta, aplicadas ao mercado de ações brasileiro durante o período de 2010 a 2023.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: apresentamos na seção 2 as formulações dos modelos de otimização, assim como índices de desempenho para avaliação das carteiras geradas; na seção 3 são detalhados a implementação computacional, os experimentos numéricos e apresentada uma discussão sobre os resultados; por fim, na seção 4 são apresentadas as considerações finais.

2 Modelos de Otimização

Considere um conjunto de n ativos com média $\mu \in \mathbb{R}^n$ e matriz de covariâncias $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$. O modelo de Markowitz na sua formulação clássica (MK-C) determina um conjunto de pesos $x \in \mathbb{R}^n$ que minimizam a variância (ou maximizam o retorno) da carteira:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && x' \Sigma x \\ & \text{sujeito a} && x' \mathbf{1} = 1 \\ & && x \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

em que $\mathbf{1}$ representa um vetor do \mathbb{R}^n cujas componentes são iguais a 1.

Uma forma alternativa, mas equivalente, de formular o modelo de Markowitz consiste em incorporar explicitamente o *trade-off* entre risco e retorno na função objetivo, usando um coeficiente de aversão ao risco $\gamma \in \mathbb{R}$. Tem-se então o modelo de Markowitz Média-Variância (MK-MV):

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && -\mu'x + \gamma x' \Sigma x \\ & \text{sujeito a} && x' \mathbf{1} = 1 \\ & && x \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Como o coeficiente de aversão ao risco penaliza o risco na função objetivo, temos que quanto menor o valor de γ , mais arriscada é a carteira. Já os valores mais altos, penalizam as carteiras com maior exposição ao risco.

Como mencionado anteriormente, é frequente que ocorram erros nas previsões dos retornos esperados, o que pode resultar em decisões de alocação de ativos menos eficazes. Para garantir resultados mais sólidos e confiáveis às condições reais do mercado, torna-se necessário considerar possíveis incertezas na formulação do modelo. Uma forma de fazer isso é considerar que os retornos esperados estimados $\hat{\mu}$ assumam valores em um conjunto de incertezas que pode ser de vários tipos, como intervalar e elipsoidal [3, 4]. Neste trabalho consideramos o conjunto intervalar definido por

$$U(\hat{\mu}) = \{\mu \in \mathbb{R}^n \mid |\mu_i - \hat{\mu}_i| \leq \varepsilon_i, i = 1, \dots, n\}, \tag{3}$$

em que ε_i representa a variação máxima dos retornos esperados em relação ao valor nominal $\hat{\mu}_i$, ou seja, o erro de estimação. Assumindo normalidade dos retornos dos ativos, podemos considerar (3) como o intervalo de confiança a 95% para o verdadeiro retorno esperado μ_i . Portanto, uma forma de definir o parâmetro ε_i é considerá-lo como a semi-amplitude do intervalo de confiança, ou seja, tomar $\varepsilon_i = 1,96 \frac{s_i}{\sqrt{T}}$, em que s_i é o desvio padrão dos retornos do ativo i e T é o tamanho da amostra utilizada para estimar o retorno médio.

Considerando o conjunto de incertezas (3), temos então a seguinte formulação robusta:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && -\hat{\mu}'x + \varepsilon'x + \gamma x'\Sigma x \\ & \text{sujeito a} && x'\mathbf{1} = 1 \\ & && x \geq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

a qual denominamos modelo de Markowitz Média-Variância Robusto (MK-MVR). Note que assim como as formulações anteriores, essa contraparte robusta continua sendo um problema de programação quadrática.

2.1 Medidas de Desempenho

A verificação do desempenho de carteiras de investimentos pode ser realizada de diversas formas, por exemplo: comparação com *benchmarks*, comparação dos retornos médios, e análises de composição, diversidade e volatilidade. As medidas de desempenho consideradas nesse trabalho foram escolhidas com base nas referências [2–4, 11].

A composição da carteira pode ser avaliada pelo Índice Herfindahl–Hirschman (HHI). Esse índice é calculado somando os quadrados dos pesos dos ativos que compõem a carteira, ou seja, $\text{HHI} = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Note que HHI assume valores entre $\frac{1}{n}$ e 1. Quanto mais próximo de 1, menos diversificada será a carteira.

A diversificação da carteira também pode ser medida pelo índice *Turnover*, uma métrica que ajuda a avaliar a atividade de negociação e a eficiência de uma estratégia de investimento. Geralmente expresso como uma porcentagem do valor total da carteira, o índice é dado pelo somatório da diferença dos pesos dos ativos, em dois períodos consecutivos, ou seja, $\text{Turnover} = \sum_{i=1}^n |x_i^{t+1} - x_i^t|$. Valores baixos indicam que houve pouca troca no peso dos ativos na carteira e, portanto, estão associados às carteiras com menores custos de transação.

A fim de obter uma visão abrangente do desempenho relativo e absoluto das carteiras em relação ao mercado e ao risco associado, consideramos a análise dos índices Sharpe, Beta e Alfa [1]. O Índice de Sharpe é uma medida de retorno ajustado ao risco que avalia a capacidade de uma carteira em gerar retornos superiores em relação a um ativo livre de risco considerando a volatilidade da carteira. Quanto maior o Índice de Sharpe, melhor o desempenho relativo da carteira. O Beta, por sua vez, é uma medida de sensibilidade da carteira em relação ao mercado, indicando o quanto a carteira se move em resposta às variações no mercado global. Finalmente, o Alfa representa a diferença entre o retorno observado da carteira e o retorno esperado com base no seu Beta. Um Alfa positivo sugere que a carteira superou as expectativas, enquanto um Alfa negativo indica desempenho abaixo do esperado, após ajustar ao risco de mercado. O índice Sharpe é calculado como o quociente entre os excessos dos retornos da carteira em relação ao ativo livre de risco e o desvio padrão dos retornos da carteira. Já os índices Beta e Alfa podem ser determinados a partir de uma regressão linear entre os excessos dos retornos da carteira e os excessos dos retornos de um *benchmark*, sendo dados pelo coeficiente angular e linear, respectivamente, da reta de regressão.

3 Experimentos Numéricos

Nesta seção, apresentamos os resultados dos testes numéricos realizados em linguagem Matlab a fim de aplicar os modelos abordados ao mercado de ações brasileiro. Inicialmente, discorreremos sobre a coleta de dados e o procedimento utilizado para realizar o backtest com dados reais de ações presentes na B3 durante o período de janeiro de 2009 a dezembro de 2023, bem como a maneira como os custos de transação foram incorporados nos experimentos. Finalizamos a seção realizando uma discussão dos resultados obtidos para o desempenho dos portfólios fora das amostras.

3.1 Coleta de Dados e Estratégia de Rebalanceamento

Adotamos uma estratégia de rebalanceamento quadrimestral baseada na atualização do Índice Brasil 100 (IBrX 100), que ocorre 3 vezes ao ano: em janeiro, maio e setembro. Dessa forma, inicialmente fizemos um levantamento no acervo do Museu da Bolsa do Brasil [8] de cada uma das ações que compuseram o índice no período de janeiro de 2010 a dezembro de 2023. Em seguida, por meio do Yahoo Finanças [13] foi realizado o download dos preços de fechamento semanais dos ativos e, finalmente, o cálculo dos retornos semanais. Embora o índice seja composto por aproximadamente 100 ações, o número de ações consideradas em cada quadrimestre foi reduzido, uma vez que selecionamos aquelas que continham dados completos para um ano anterior ao início do quadrimestre. Por exemplo, das 100 ações presentes no IBrX 100 em janeiro de 2010, 57 apresentavam dados históricos de preços completos para as 52 semanas anteriores. Esses 52 retornos semanais foram usados para estimar os parâmetros dos modelos: média, matriz de covariância e intervalos de confiança para o modelo robusto. O número de ativos em cada período variou de 57 a 98, com uma mediana de 75,8 ativos.

No início de cada quadrimestre uma otimização foi realizada considerando as ações presentes no índice daquele período. Sendo assim, realizamos a primeira otimização a partir dessas 57 ações e parâmetros estimados, obtendo as composições ótimas para as carteiras construídas segundo os modelos: Markowitz Clássico (MK-C), média-variância (MK-MV) e média-variância robusto com conjunto de incertezas intervalar (MK-MVR). Em seguida, o desempenho das carteiras é avaliado semanalmente durante aproximadamente 4 meses, até a data que antecede a nova atualização do IBrX 100. Para tanto, foram calculados os verdadeiros retornos semanais das carteiras utilizando os retornos reais dos ativos e os pesos obtidos pelos modelos de otimização. Esse processo é repetido até o último quadrimestre de 2023. Dessa forma, entre janeiro de 2010 a dezembro de 2023, consideramos 695 semanas compreendidas entre 42 períodos de atualização das carteiras e, portanto, foram realizadas 42 otimizações para cada modelo.

3.2 Detalhes da Implementação

Os modelos foram implementados em Matlab R2023a, e por se tratar de modelos de otimização quadrática, foi possível resolvê-los empregando a rotina `quadprog`. De acordo com [3] em geral, o valor do coeficiente de aversão ao risco (γ) presente nos modelos MK-MV e MK-MVR varia de 2 a 4. Neste trabalho optamos por fixar $\gamma = 4$.

As estimativas dos parâmetros do modelo foram consideradas como a média amostral e a matriz de covariância dos retornos semanais das 52 semanas que precedem o início de cada carteira, ou seja, o início de cada quadrimestre entre janeiro de 2010 e dezembro de 2023. Sabemos que há muita discussão sobre o impacto dos erros causados pelo uso da média e covariância amostrais no desempenho das carteiras fora da amostra [2, 3]. No entanto, na prática, a média amostral ainda é muito utilizada e, dessa forma, resolvemos utilizá-la a fim de investigar se ganhos podem ser obtidos após o emprego da abordagem robusta, que considera o erro cometido na estimação da média explicitamente na formulação do modelo. A matriz de covariâncias foi calculada pela função que emprega um método de encolhimento (*shrinkage*) a fim de considerar um estimador mais robusto do que a matriz de covariância amostral.

Testes iniciais mostraram que a maioria dos ativos segue uma distribuição normal. Sendo assim, tomamos $\varepsilon_i = 1,96 \frac{s_i}{\sqrt{52}}$, $i = 1, \dots, n$, no conjunto de incertezas intervalar definido na equação (3), em que s_i é o desvio padrão dos retornos do ativo i . Isso significa que os ativos com maior erro de estimação, dado pela semi-amplitude do intervalo de confiança a 95% para o retorno esperado, foram penalizados na função objetivo do Problema 4.

Assim como abordado em [2], os custos de transação foram considerados após a otimização, calculados de forma proporcional às mudanças ocorridas na carteira, ou seja, proporcional aos

volumes de compra e venda de ativos no início de cada quadrimestre, dado pelo módulo da diferença dos pesos de um ativo em relação ao peso obtido no período anterior. Como o conjunto de ações pode variar a cada quadrimestre, é possível que um ativo participe da otimização em um período, mas não no seguinte, ou vice-versa. Nesse caso não há diferença entre pesos a ser calculada e, portanto, o custo incide apenas sobre o peso do ativo, seja para compra, no caso de entrar na carteira, ou para venda, quando o ativo sai da carteira. Ressaltamos que o custo não é um valor monetário, sendo dado na mesma unidade que os retornos dos ativos, isto significa que consideramos um custo relativo, e não absoluto [5]. A constante de proporcionalidade usada nos testes foi 0,005, conforme sugerido por [2]. Assim, o custo relativo de transação é descontado do retorno real da carteira no momento em que os pesos dos ativos são atualizados.

3.3 Análise dos Resultados

A análise dos resultados está dividida em duas partes. Primeiramente comparamos as características dos portfólios obtidos por cada modelo por meio dos índices HHI e *Turnover* e, em seguida, analisamos seus desempenhos fora da amostra segundo os índices Sharpe, Beta e Alfa e o retorno médio anualizado (RMA). Consideramos dois *benchmarks*: Ibovespa e as carteiras ingênuas obtidas com pesos iguais para cada um dos ativos (PI), ou seja, a mais diversificada possível.

A Tabela 1 resume as características das composições das carteiras construídas em cada um dos 42 períodos (quadrimestres) considerados. Para simplificar, nos referimos aos números mínimo, mediano e máximo de ativos compondo as carteiras como NAmin, NAMED e NAMax, respectivamente. Os valores correspondentes ao HHI e *Turnover* são calculados tomando a média aritmética dessas medidas obtidas para cada um dos 42 períodos. Podemos notar que comparando os modelos de Markowitz, a abordagem clássica é a que gera portfólios mais diversificados. O modelo MK-MVR foi o que apresentou menor valor para HHI, demonstrando a limitação dessa abordagem em relação à diversificação da carteira. A medida *Turnover* indica que as carteiras obtidas pelo modelo de Markowitz clássico foram as que apresentaram menos mudanças nos ativos, enquanto os modelos MK-MV e MK-MVR apresentaram maiores variações nos conjuntos de ativos, o que pode ser justificado pelo fato de que tais modelos apresentaram as carteiras mais esparsas.

Tabela 1: Características das carteiras

	NAmin	NAMED	NAMax	HHI	<i>Turnover</i>
MK-C	9	17	27	0,1411	0,9753
MK-MV	3	6	9	0,2974	1,3517
MK-MVR	2	5	9	0,3831	1,2841

Os resultados referentes ao desempenho dos portfólios fora da amostra no horizonte de investimento de quase 14 anos (de janeiro de 2010 a dezembro de 2023) estão resumidos na Tabela 2. Os índices Sharpe, Beta e Alfa foram calculados para o período completo, ou seja, a partir dos retornos semanais ao longo das 695 semanas. Para o cálculo desses índices, os excessos de retornos foram calculados em relação à taxa Selic. Note que o modelo MK-MVR se destaca em todas as medidas: apresenta um retorno médio anualizado de 16,02%, levando também a um maior retorno semanal ajustado ao risco, uma vez que obteve um índice Sharpe semanal de 4,91%. Já para o índice Beta, MK-C e MK-MVR apresentaram os menores valores (0,54 e 0,55, respectivamente), o que significa que estes modelos retornaram carteiras menos sensíveis às variações do mercado, representado pelo Ibovespa. Podemos notar ainda que, com exceção das carteiras obtidas pelo modelo MK-C, as demais superaram o índice de mercado, uma vez que geraram Alfas positivos, sendo o maior deles referente ao modelo MK-MVR.

Tabela 2: Medidas de desempenho para os testes fora da amostra

	RMA	Sharpe	Beta	Alfa
MK-C	0,0408	-0,0268	0,5411	-0,0004
MK-MV	0,0897	0,0172	0,7020	0,0010
MK-MVR	0,1602	0,0491	0,5523	0,0019
PI	0,0741	0,0033	0,9433	0,0005
Ibovespa	0,0440	-0,0142	-	-

A Figura 1 ilustra a evolução das carteiras ao longo do tempo por meio dos retornos acumulados das carteiras geradas por cada modelo e também os retornos acumulados do Ibovespa. Observamos que a superioridade dos retornos da carteira obtida por MK-MVR é consistente ao longo do tempo. Um investimento iniciado em janeiro de 2010 seguindo as decisões desse modelo levaria a retornos maiores comparado aos demais modelos, ou pelo menos muito próximos da melhor opção, considerando resgate a qualquer momento a partir de 2011. Note que todas as carteiras apresentaram uma queda significativa no desempenho no início de 2020, exatamente no início da crise causada pela pandemia da COVID-19. Além disso, observamos que MK-MVR, PI e Ibovespa se recuperaram dentro de um ano, enquanto as carteiras obtidas pelos modelos nominais de Markowitz não retomaram o mesmo nível de retorno acumulado do início da crise.

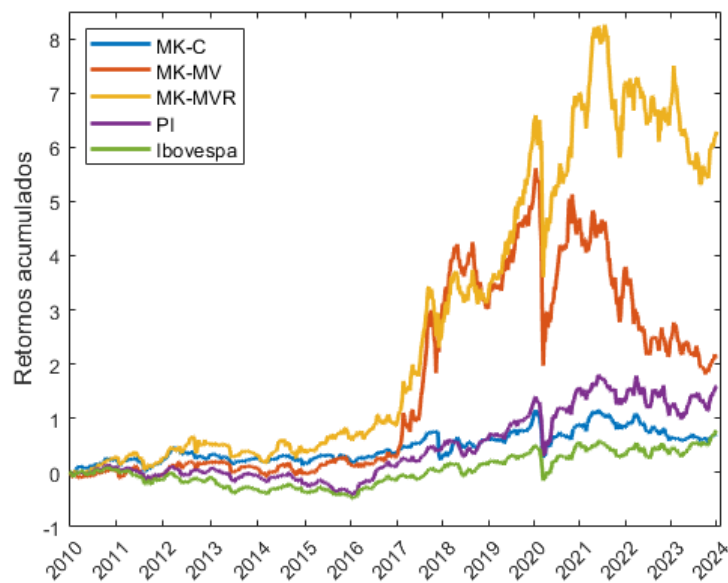


Figura 1: Retornos acumulados durante o período de janeiro de 2010 a dezembro de 2023. Fonte: resultados da pesquisa (elaboração própria).

4 Considerações Finais

Neste trabalho, comparamos o desempenho de modelos de otimização determinística e robusta aplicados à seleção de portfólios financeiros. Os resultados indicaram um desempenho favorável ao modelo robusto que leva em consideração as incertezas associadas à estimação dos retornos médios

dos ativos, por meio da penalização dos ativos que apresentam maior erro de estimação, dado pela semi-amplitude do intervalo de confiança a 95% para o retorno médio de cada ativo candidato a compor a carteira. Apesar da superioridade deste modelo em relação ao retorno médio anualizado e ao retorno ajustado ao risco, este gerou carteiras mais esparsas. Assim, como continuidade da pesquisa, vale a pena investigar outras formas de incorporar as incertezas de modo a obter bons resultados com carteiras mais diversificadas, seja por meio de um aprimoramento de técnicas de estimação dos retornos ou pela consideração de outros tipos de conjuntos de incertezas.

Agradecimento

Agradecemos à Universidade Estadual do Paraná (Unespar) pelo apoio concedido e ao colega Mateus Silva Pedroso pelo auxílio na coleta de dados.

Referências

- [1] R. A. Brealey, S. C. Myers, F. Allen e A. Edmans. **Principles of Corporate Finance**. 14^a ed. McGraw Hill, 2023.
- [2] V. Demiguel, L. Garlappi e R. Uppal. “Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy?” Em: **Review of Financial Studies** 22 (mai. de 2009). DOI: 10.1093/rfs/hhm075.
- [3] F. J. Fabozzi, P. N. Kolm, D. A. Pachamanova e S. M. Focardi. **Robust Portfolio Optimization and Management**. John Wiley Sons, Inc., 2012.
- [4] A. Georgantas, Doumpos M. e C. Zopounidis. “Robust optimization approaches for portfolio selection: a comparative analysis”. Em: **Annals of Operations Research** (2021). DOI: <https://doi.org/10.1007/s10479-021-04177-y>.
- [5] O. Ledoit e M. Wolf. **Markowitz portfolios under transaction costs**. ECON - Working Papers 420. Department of Economics - University of Zurich, 2022. URL: <https://ideas.repec.org/p/zur/econwp/420.html>.
- [6] F. Luan, W. Zhang e Y. Liu. “Robust international portfolio optimization with worst-case mean-CVaR”. Em: **European Journal of Operational Research** 303 (mar. de 2022). DOI: 10.1016/j.ejor.2022.03.011.
- [7] H. Markowitz. “Portfolio selection”. Em: **The Journal of Finance** 7.1 (1952), pp. 77–91.
- [8] **MUB3 - Museu da Bolsa do Brasil**. Acesso em 04/03/2024, <https://mub3.org.br>.
- [9] A. Quaranta e A. Zaffaroni. “Robust optimization of conditional value at risk and portfolio selection”. Em: **Journal of Banking Finance** 32 (out. de 2008), pp. 2046–2056. DOI: 10.1016/j.jbankfin.2007.12.025.
- [10] A. B. Rubesam e A. Lomonaco. “Carteiras de Variância Mínima no Brasil”. Em: **Rev. Bras. Finanças (Online)** 11.1 (2013), pp. 81–118.
- [11] X. Tu e B. Li. “Robust portfolio selection with smart return prediction”. Em: **Economic Modelling** 135 (1924). DOI: 10.1016/j.econmod.2024.106719.
- [12] S. Uryasev e R. T. Rockafellar. “Conditional Value-at-Risk: Optimization Approach”. Em: **Stochastic Optimization: Algorithms and Applications**. Boston, MA: Springer US, 2001, pp. 411–435. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6594-6_17.
- [13] **Yahoo Finanças**. Acesso em 04/03/2024, <https://br.financas.yahoo.com>.