

# Análise de Uma Versão Híbrida do Algoritmo NSGA-III em Problemas de Otimização com Muitos Objetivos

Regina Carla Lima Corrêa de Sousa<sup>1</sup>

Federal University of Ouro Preto - UFOP, MG

Victor Samuel Levindo Mont’Mor<sup>2</sup>, Dênis E. C. Vargas<sup>3</sup>, Elizabeth F. Wanner<sup>4</sup>

Federal Center for Technological Education of Minas Gerais CEFET-MG

**Resumo.** Esse trabalho visa propor e analisar o desempenho do algoritmo NSGA-III-HIB, resultado da hibridização do Non-dominated Sorting Genetic Algorithm III (NSGA-III) com a Evolução Diferencial, incorporando os algoritmos Seno Cosseno e Aritmético, em problemas de otimização com muitos objetivos (MaOPs, do inglês Many-Objective Optimization Problems). Foram utilizados MaOPs do conjunto benchmark DTLZ nos experimentos computacionais e uma análise estatística empregando o teste de hipóteses não-paramétrico de Wilcoxon foi conduzida com base nos resultados obtidos pelo NSGA-III-HIB e o NSGA-III no indicador de desempenho IGD+. Os resultados evidenciam uma superioridade global do NSGA-III-HIB sobre o NSGA-III, especialmente nos MaOPs com 8, 10 e 15 funções objetivo.

**Palavras-chave.** Otimização, Muitos Objetivos, Hibridização, Algoritmos Evolutivos, NSGA-III

## 1 Introdução

Problemas de Otimização Multiobjetivo (POM) envolvem a busca por soluções que otimizem múltiplos objetivos conflitantes simultaneamente, visando encontrar um conjunto de soluções ótimas de Pareto, isto é, que representam os melhores compromissos entre esses objetivos. Existem diversos métodos determinísticos para resolver POMs, que geralmente transformam um POM em diversos problemas de otimização monobjetivo para resolvê-los separadamente através de técnicas matemáticas tais como de programação linear ou não-linear. Esses métodos possuem garantia de convergência para soluções ótimas de Pareto em POMs onde as funções objetivo e as restrições possuem propriedades tais como linearidade, convexidade, continuidade ou diferenciabilidade. No entanto, vale ressaltar que tais métodos muitas vezes demandam cálculos complexos, como derivadas, gradientes ou hessianas, o que pode tornar sua aplicação desafiadora em determinados POMs. Já os Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo (MOEAs), apesar de não possuírem garantia de convergência para soluções ótimas de Pareto, ganharam popularidade nos últimos anos principalmente por serem capazes de obter aproximações das soluções ótimas de Pareto em uma única execução sem a necessidade de fragmentar o POM ou exigir características específicas das funções objetivo [16].

Um dos MOEAs mais populares da literatura é o Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA-II) [4], cuja versão mais recente, o NSGA-III [3], foi projetado para lidar com problemas de otimização com muitos objetivos (MaOPs, do inglês Many-Objective Optimization Problems), os quais são POMs com mais de 3 funções objetivo. A distinção entre problemas de otimização

---

<sup>1</sup>regina\_carla@ufop.edu.br

<sup>2</sup>victorperial@hotmail.com

<sup>3</sup>denis.vargas@cefetmg.br

<sup>4</sup>efwanner@cefetmg.br

multiobjetivo e problemas de otimização com muitos objetivos já está estabelecida na literatura internacional, onde a nomenclatura emprega os termos Multi e Many em inglês para essa diferenciação [15, 19]. Essa prática é também comum em trabalhos escritos em língua portuguesa tais como [5, 8, 14], refletindo a padronização e consolidação desses termos.

Um dos principais interesses que a comunidade acadêmica tem para o estudo dos MaOPs são suas diversas aplicações. Recentemente, [13] apresentou MaOPs com até 10 funções objetivo, os quais modelam problemas complexos em diversas áreas da engenharia. Além disso, a pesquisa conduzida por [10] investigou diversas técnicas para se resolver POMs com restrições, entre elas a transformação de restrições em objetivos adicionais. Ao aplicar essa técnica nos 50 POMs baseados em problemas do mundo real apresentados em [9], por exemplo, muitos se tornam MaOPs com 15 ou mais funções objetivo.

Com o intuito de potencializar as vantagens de cada MOEA, estratégias de hibridização têm ganhado destaque na literatura [11, 20]. Este trabalho propõe o NSGA-III-HIB, um algoritmo híbrido que combina o NSGA-III com Evolução Diferencial (ED) [17] incorporando aspectos dos Algoritmos Seno Cosseno (SCA) [12] e de Otimização Aritmética (AOA) [1] e avalia sua eficácia em MaOPs. Vale mencionar que a ED é bem conhecida por sua aplicação em problemas com origem no mundo real, como por exemplo em [2]. Reforçamos que a principal inovação desse trabalho foi propor uma nova combinação dos algoritmos NSGA-III, ED, SCA e AOA e analisar seu desempenho em MaOPs. [6] realizou uma revisão sistemática da literatura do SCA e recomendou algumas direções de pesquisas futuras para o SCA, onde uma delas foi estender suas variantes para lidar com MaOPs, uma área ainda pouco explorada na literatura. Portanto, este trabalho ajuda no avanço desse campo ao contribuir no preenchimento dessa lacuna.

O restante do artigo está organizado da seguinte forma: a Seção 2 define os problemas de otimização e descreve os algoritmos evolutivos utilizados neste artigo. Os experimentos computacionais e uma análise dos resultados são apresentados e discutidos na Seção 3. Por fim, a Seção 4 revela as conclusões e possíveis direções para trabalhos futuros.

## 2 Otimização Multiobjetivo e Algoritmos Evolutivos

POMs podem ser definidos como

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_P(\mathbf{x})] \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $f_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  com  $p = 2, \dots, P$  são chamadas de funções objetivo,  $\mathbb{R}^n$  é chamado de espaço das variáveis e  $\mathbb{R}^P$  de espaço dos objetivos. Um MaOP é um POM onde  $P > 3$ .

Considere dois vetores  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k)$ . Dizemos que  $\mathbf{u}$  domina  $\mathbf{v}$  (denota-se por  $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$ ) se, e somente se,  $(u_i \leq v_i \forall i = 1, \dots, k) \wedge (\exists j \in \{1, \dots, k\} | u_j < v_j)$ . Se  $\mathbf{u} \not\preceq \mathbf{v}$  e  $\mathbf{v} \not\preceq \mathbf{u}$ , dizemos que  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são não-dominados entre si. O conjunto  $Q$  definido matematicamente como

$$Q = \{\mathbf{x} \in D | \forall \mathbf{y} \in Q, (\mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \implies f(\mathbf{x}) \not\preceq f(\mathbf{y}) \wedge f(\mathbf{y}) \not\preceq f(\mathbf{x}) \wedge \nexists \mathbf{z} \in D | f(\mathbf{z}) \preceq f(\mathbf{x})\} \quad (2)$$

é chamado de soluções ótimas de Pareto do POM e o conjunto  $FP = \{f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^P, \forall \mathbf{x} \in Q\}$  é sua frente de Pareto.

O NSGA-III é um dos MOEAs mais populares na literatura para resolver MaOPs. Ele opera com uma população de soluções candidatas empregando o conceito de dominação para classificá-las em diferentes níveis de dominância. Dessa forma, ele preserva as soluções não-dominadas entre si de uma geração para a próxima, selecionando as melhores com base em seu ranking de dominação.

Adicionalmente, o NSGA-III utiliza uma abordagem de pontos de referência bem-distribuídos em um hiperplano normalizado de dimensão  $P - 1$ , que é igualmente inclinado a todos os eixos

objetivos e intercepta cada eixo no valor 1, promovendo assim a diversidade da população. Cada elemento da população é associado a cada um desses pontos de referência, fazendo com que as soluções obtidas tendem a ser amplamente distribuídas ao longo da frente de Pareto.

A ED, por sua vez, gera uma nova geração de indivíduos combinando características de três membros escolhidos aleatoriamente da população atual. Esse processo envolve operações de mutação e cruzamento entre os indivíduos selecionados. A mutação é responsável por gerar novos indivíduos na população e é expressa por:

$$\mathbf{v} = \mathbf{x}_{r1} + F \times (\mathbf{x}_{r2} - \mathbf{x}_{r3}) \quad (3)$$

onde  $\mathbf{v}$  representa o vetor mutante,  $\mathbf{x}_{r1}$ ,  $\mathbf{x}_{r2}$  e  $\mathbf{x}_{r3}$  são três indivíduos selecionados aleatoriamente da população e  $F$  é o fator de escala que controla a amplitude da mutação. O cruzamento, por sua vez, combina  $\mathbf{v}$  com um indivíduo  $\mathbf{x}$  da população para criar o vetor candidato  $\mathbf{u}$  da próxima geração. Este processo é controlado por uma taxa de cruzamento que determina a probabilidade de cada componente do vetor mutante ser selecionado para a próxima geração. Se  $\mathbf{u}$  possuir uma melhor função de aptidão do que  $\mathbf{x}$ , ele substitui  $\mathbf{x}$  na próxima geração; caso contrário,  $\mathbf{u}$  é descartado.

O SCA se baseia nas propriedades das funções trigonométricas seno e cosseno, conhecidas por sua periodicidade e oscilação entre -1 e 1, possibilitando uma exploração eficaz do espaço de busca. Neste algoritmo, as soluções candidatas são adaptadas conforme a Equação 4 a seguir:

$$\mathbf{x}_i^{t+1} = \begin{cases} \mathbf{x}_i^t + r_1 \times \sin(r_2) \times |r_3 \mathbf{p}_i^t - \mathbf{x}_i^t|, & r_4 < 0.5 \\ \mathbf{x}_i^t + r_1 \times \cos(r_2) \times |r_3 \mathbf{p}_i^t - \mathbf{x}_i^t|, & r_4 \geq 0.5 \end{cases} \quad (4)$$

onde  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$  são números aleatórios entre 0 e 1,  $\mathbf{x}_i^t$  é o  $i$ -ésimo elemento da população na geração  $t$  e  $\mathbf{p}$  é uma solução de destino.

O AOA é muito similar ao SCA e se baseia nas operações aritméticas básicas para realizar o chamado cruzamento aritmético, o qual é dado pelas seguintes equações:

$$\mathbf{x}_i^{t+1} = \begin{cases} \mathbf{x}_i^t \div (MOP + \epsilon) \times ((UB_j - LB_j) \times \mu + LB_j), & r_1 < 0.5 \\ \mathbf{x}_i^t \times (MOP) \times ((UB_j - LB_j) \times \mu + LB_j), & r_1 \geq 0.5 \end{cases} \quad (5)$$

$$\mathbf{x}_i^{t+1} = \begin{cases} \mathbf{x}_i^t - MOP \times ((UB_j - LB_j) \times \mu + LB_j), & r_2 < 0.5 \\ \mathbf{x}_i^t + MOP \times ((UB_j - LB_j) \times \mu + LB_j), & r_2 \geq 0.5 \end{cases} \quad (6)$$

onde  $r_1$  e  $r_2$  são números aleatórios entre 0 e 1,  $MOP$  um parâmetro que controla a exploração e refinamento do espaço de busca,  $\epsilon$  um parâmetro definido pelo usuário e  $UB$  e  $LB$  são, respectivamente, os limites superior e inferior das variáveis. Maiores detalhes sobre o NSGA-III, ED, SCA e AOA podem ser obtidos, respectivamente, em [3], [17], [12] e [1].

### 3 Experimentos Computacionais

O algoritmo proposto, NSGA-III-HIB, opera de maneira semelhante ao NSGA-III, incorporando elementos dos algoritmos ED, SCA e AOA. A partir da metade das gerações, para cada indivíduo na população do NSGA-III-HIB, um número aleatório  $r$  entre 0 e 1 é selecionado. Se  $r \leq 0.5$ , o indivíduo evolui através da ED (Equação 3). Caso contrário, ele evolui inicialmente via SCA (Equação 4) e em sequência via AOA (Equações 5 e 6). Os códigos em MATLAB para o NSGA-III e a ED estão disponíveis no PlatEMO [18], enquanto os códigos para o SCA e AOA podem ser encontrados em [12] e [1], respectivamente.

Os desempenhos do NSGA-III-HIB e do NSGA-III foram comparados nos problemas DTLZ1 ao DTLZ4, variando o número de funções objetivo de cada um deles em 5, 8, 10 e 15, os mesmos

problemas e dimensões utilizados em [3]. Cada algoritmo foi executado 20 vezes em cada problema para cada quantidade de funções objetivo e cada aproximação da frente de Pareto obtida foi avaliada no indicador de desempenho *Inverted Generational Distance Plus* (IGD+) [7], o qual é calculado pela seguinte equação [14]:

$$\text{IGD}(A) = \frac{1}{|Z|} \left( \sum_{j=1}^{|Z|} \hat{d}_j^p \right)^{1/p} \quad (7)$$

onde  $\hat{d}_j$  é a distância de  $\vec{z}_j$  à solução mais próxima de  $A$ . O IGD+ é o IGD com a seguinte definição de distância à região dominada:

$$d^+(\vec{z}, \vec{a}) = \sqrt{d_1^{+2} + \dots + d_m^{+2}} = \sqrt{(\max\{a_1 - z_1, 0\})^2 + \dots + (\max\{a_m - z_m, 0\})^2}. \quad (8)$$

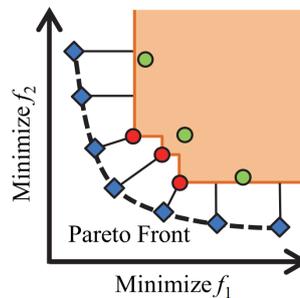


Figura 1: Interpretação geométrica do IGD+. Fonte: [7].

Geometricamente, o IGD+ pode ser interpretado como a distância média da frente de Pareto real do POM até a região dominada pelas soluções ótimas de Pareto obtidas pelo MOEA em avaliação (Figura 1). Assim, quanto menor o valor do IGD+, mais próximas da frente de Pareto real do POM as soluções ótimas de Pareto obtidas pelo MOEA estarão. Conseqüentemente, o MOEA que obtiver menor valor do IGD+ será o mais eficiente.

A Tabela 1 mostra o tamanho da população juntamente com a quantidade de pontos de referência. O número de variáveis de decisão de cada problema é definido como  $P + r - 1$ , onde  $P$  é o número de funções objetivo,  $r = 5$  para o DTLZ1 e  $r = 10$  para os demais DTLZs. Já a Tabela 2 apresenta a média dos 20 valores do IGD+ obtidos pelos dois algoritmos, juntamente com o número máximo de gerações utilizados em cada problema. A existência de diferenças estatisticamente significativas segundo o teste de Wilcoxon (p-valor  $< 0,05$ ) é indicada pelo símbolo (+). Os resultados da Tabela 2 estão consolidados na Figura 2 onde o verde indica o melhor resultado do NSGA-III-HIB, enquanto o vermelho indica o melhor resultado do NSGA-III.

Tabela 1: Número de Funções Objetivo ( $P$ ), Pontos de Referência ( $H$ ) e Tamanho da População ( $N$ ).

$P$	$H$	$N$
5	210	212
8	156	156
10	275	276
15	135	136

Tabela 2: Médias dos resultados do IGD+ obtidos pelos algoritmos NSGA-III e NSGA-III-HIB. Os melhores estão destacados em negrito, enquanto (+) indica p-valor < 0,05 no teste de Wilcoxon.

	<i>P</i>	Gerações	NSGA-III	NSGA-III-HIB
DTLZ1	5	600	7.5216e-04	<b>6.1125e-04</b>
	8	750	0.0323	<b>0.0119 (+)</b>
	10	1000	0.0128	<b>0.0070</b>
	15	1500	<b>0.0218 (+)</b>	0.0384
DTLZ2	5	350	<b>0.0034 (+)</b>	0.0063
	8	500	<b>0.0125 (+)</b>	0.0172
	10	750	0.0275	<b>0.0170 (+)</b>
	15	1000	0.1081	<b>0.0161 (+)</b>
DTLZ3	5	1000	<b>0.0032 (+)</b>	0.0060
	8	1000	0.2011	<b>0.0706 (+)</b>
	10	1500	0.0721	<b>0.0548 (+)</b>
	15	2000	0.3543	<b>0.0639 (+)</b>
DTLZ4	5	1000	<b>0.0014 (+)</b>	0.0018
	8	1250	0.0304	<b>0.0121 (+)</b>
	10	2000	0.0166	<b>0.0096 (+)</b>
	15	3000	0.0890	<b>0.0135 (+)</b>

	5	8	10	15
DTLZ1		(+)		(+)
DTLZ2	(+)	(+)	(+)	(+)
DTLZ3	(+)	(+)	(+)	(+)
DTLZ4	(+)	(+)	(+)	(+)

Figura 2: Resumo dos resultados da Tabela 2: verde indica melhor desempenho para o NSGA-III-HIB e vermelho para o NSGA-III. O símbolo (+) indica p-valor < 0,05 no teste de Wilcoxon. Fonte: dos autores.

Nos problemas com 10 objetivos, o NSGA-III-HIB demonstrou melhor desempenho em todos os MaOPs, destacando-se por obter o menor valor do IGD+ e por apresentar diferenças estatisticamente significativas praticamente em todos, com exceção ao DTLZ1. Já nos problemas DTLZ3 e DTLZ4 com 8, 10 e 15 objetivos, o NSGA-III-HIB novamente obteve os melhores resultados sempre com diferenças estatisticamente significativas. Além disso, ele demonstrou superioridade em praticamente todos os cenários com 8 e 15 objetivos, exceto no DTLZ2 com 8 objetivos e no DTLZ1 com 15 objetivos. Por outro lado, para os problemas com 5 objetivos o desempenho do NSGA-III-HIB revelou-se inferior nos MaOPs DTLZ2 ao DTLZ4, vencendo apenas no DTLZ1 sem diferenças estatisticamente significativas. Isso sugere que a hibridização proposta neste estudo tem maior probabilidade de impactar positivamente o desempenho do NSGA-III em MaOPs com um grande número de funções objetivo.

## 4 Considerações Finais

Esse trabalho propôs e avaliou o desempenho do NSGA-III-HIB, uma versão híbrida do NSGA-III que incorpora elementos da ED, SCA e AOA, em MaOPs do suite DTLZ. Uma análise estatística dos resultados foi conduzida usando o indicador de desempenho IGD+ e o teste de hipóteses

não-paramétrico de Wilcoxon para avaliar a presença de diferenças estatisticamente significativas entre os resultados. Com base nos testes conduzidos, foi possível concluir que o NSGA-III-HIB demonstrou um desempenho global superior em relação ao NSGA-III nos problemas com muitos objetivos adotados neste trabalho, especialmente nos MaOPs com 8, 10 e 15 funções objetivo. Dessa forma, há uma expectativa de que a hibridização proposta aqui terá mais chances de melhorar o desempenho do NSGA-III em MaOPs com um grande número de funções objetivo.

Enfatizamos novamente que a principal inovação deste estudo reside na proposição de uma nova combinação dos algoritmos NSGA-III, ED, SCA e AOA, cujo desempenho foi analisado em MaOPs e se mostrou mais eficiente que o do NSGA-III. Além disso, ele também contribui para o preenchimento da lacuna ainda pouco explorada na literatura sobre o uso de variantes do SCA em MaOPs. Para trabalhos futuros, pode-se investigar o desempenho do NSGA-III-HIB na resolução de MaOPs com um número ainda maior de objetivos, incluindo aqueles aplicados à problemas com origem no mundo real mencionados anteriormente no texto, a fim de identificar suas potencialidades e limitações e aprofundar a compreensão sobre elas.

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao CEFET-MG, UFOP, CNPq, CAPES e à FAPEMIG (APQ 00408-21) pelo apoio financeiro.

## Referências

- [1] L. Abualigah, A. Diabat, S. Mirjalili, M. A. Elaziz e A. H. Gandomi. “The arithmetic optimization algorithm”. Em: **Computer methods in applied mechanics and engineering** 376 (2021), p. 113609.
- [2] J. P. G. Carvalho, A. C. C. Lemonge, P. H. Hallak e D. E. C. Vargas. “A differential evolution to find the best material groupings in truss optimization”. Em: **EngOpt 2018 Proceedings of the 6th International Conference on Engineering Optimization**. Springer. 2019, pp. 102–114. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-97773-7\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-97773-7_10).
- [3] K. Deb e H. Jain. “An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part I: solving problems with box constraints”. Em: **IEEE transactions on evolutionary computation** 18.4 (2013), pp. 577–601.
- [4] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal e T. Meyarivan. “A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II”. Em: **IEEE transactions on evolutionary computation** 6.2 (2002), pp. 182–197.
- [5] C. M. Floriano. **3MO-AHP: uma abordagem de redução de inconsistência através de medidas de qualidade mono, multi ou muitos objetivos**. Exame de Qualificação (Doutorado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal Fluminense. 2023.
- [6] A. B. Gabis, Y. Meraihi, S. Mirjalili e A. Ramdane-Cherif. “A comprehensive survey of sine cosine algorithm: variants and applications”. Em: **Artificial Intelligence Review** 54.7 (2021), pp. 5469–5540.
- [7] H. Ishibuchi, H. Masuda e Y. Nojima. “Sensitivity of performance evaluation results by inverted generational distance to reference points”. Em: **Proceedings of the 2016 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)**. 2016, pp. 1107–1114.

- [8] J. N. Kuk. “Uso de Análise de Superfície de Aptidão, Seleção Adaptativa de Operadores e Aprendizado de Máquina na Solução de Problemas Multi e com Muitos Objetivos”. Tese de doutorado. Programa de Pós-Graduação em Informática, Universidade Federal do Paraná, 2022.
- [9] A. Kumar, G. Wu, M. Z. Ali, Q. Luo, R. Mallipeddi, P. N. Suganthan e S. Das. “A benchmark-suite of real-world constrained multi-objective optimization problems and some baseline results”. Em: **Swarm and Evolutionary Computation** 67 (2021), p. 100961.
- [10] J. Liang, X. Ban, K. Yu, B. Qu, K. Qiao, C. Yue, K. Chen e K. C. Tan. “A Survey on Evolutionary Constrained Multiobjective Optimization”. Em: **IEEE Transactions on Evolutionary Computation** 27.2 (2023), pp. 201–221.
- [11] A. O. Martins, M. C. C. Peito, D. E. C. Vargas e E. F. Wanner. “Development of a Bio-inspired Hybrid Decomposition Algorithm Based on Whale and Differential Evolution Strategies for Multiobjective Optimization”. Em: **VETOR-Revista de Ciências Exatas e Engenharias** 33.1 (2023), pp. 13–24. DOI: <https://doi.org/10.14295/vetor.v33i1.15567>.
- [12] S. Mirjalili. “SCA: a sine cosine algorithm for solving optimization problems”. Em: **Knowledge-based systems** 96 (2016), pp. 120–133.
- [13] V. Palakonda, J. Kang e H. Jung. “Benchmarking Real-World Many-Objective Problems: A Problem Suite with Baseline Results”. Em: **IEEE Access** (2024).
- [14] M. C. C. Peito, D. E. C. Vargas e E. F. Wanner. “Comparando Algoritmos Evolutivos Baseados em Decomposição para Problemas de Otimização Multiobjetivo e com Muitos Objetivos”. Em: **VETOR-Revista de Ciências Exatas e Engenharias** 33.2 (2023), pp. 41–51. DOI: <https://doi.org/10.14295/vetor.v33i2.16444>.
- [15] D. Rodrigues. “Single, multi-and many-objective meta-heuristic algorithms applied to pattern recognition”. Tese de doutorado. Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, 2019.
- [16] S. Sharma e V. Kumar. “A comprehensive review on multi-objective optimization techniques: Past, present and future”. Em: **Archives of Computational Methods in Engineering** 29.7 (2022), pp. 5605–5633.
- [17] R. Storn e K. V. Price. “Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces”. Em: **Journal of Global Optimization** 11 (1997), pp. 341–359.
- [18] Y. Tian, R. Cheng, X. Zhang e Y. Jin. “PlatEMO: A MATLAB platform for evolutionary multi-objective optimization [educational forum]”. Em: **IEEE Computational Intelligence Magazine** 12.4 (2017), pp. 73–87.
- [19] Y. Tian, H. Wang, X. Zhang e Y. Jin. “Effectiveness and efficiency of non-dominated sorting for evolutionary multi-and many-objective optimization”. Em: **Complex & Intelligent Systems** 3 (2017), pp. 247–263.
- [20] D. E. C. Vargas, A. C. C. Lemonge, H. J. C. Barbosa e H. S. Bernardino. “Differential evolution with the adaptive penalty method for constrained multiobjective optimization”. Em: **2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation**. IEEE. 2013, pp. 1342–1349. DOI: <https://doi.org/10.1109/CEC.2013.6557720>.