

# Construção de um Esquema *Upwind* de Alta Resolução Baseado em Curvas Quadráticas de Bézier

Pablo C. R. Oviedo<sup>1</sup>  
PPGMC/UFJF, Juiz de Fora, MG  
Bernardo M. Rocha<sup>2</sup>  
DCC/UFJF, Juiz de Fora, MG  
Rafael A. B. de Queiroz<sup>3</sup>  
DECOM/UFOP, Ouro Preto, MG

**Resumo.** Este trabalho apresenta um novo esquema *upwind* de alta resolução, baseado nas curvas quadráticas de Bézier, denominado *Second-Order Bézier Upwind Scheme* (SOBUS). Esse esquema numérico utiliza a formulação de variáveis normalizadas e garante soluções numéricas limitadas. Ele foi desenvolvido para a discretização dos termos convectivos em equações diferenciais parciais. O esquema SOBUS foi testado em problemas 1D de advecção linear e na equação de Burgers viscosa. Os resultados numéricos obtidos indicam que o esquema proposto é uma alternativa atraente para problemas dominados por convecção, quando comparado a outros esquemas *upwind* relevantes na literatura, como FOU, HPUS, TOPUS e SMART.

**Palavras-chave.** *Upwind*, Variáveis Normalizadas, Equações Diferenciais Parciais, Métodos Numéricos.

## 1 Introdução

Muitos problemas de dinâmica dos fluidos computacional são modelados por equações diferenciais parciais (EDPs), e uma parte significativa desses problemas é predominantemente dominada pela convecção. A solução numérica dessas equações depende do tratamento adequado dos termos convectivos, o que, em geral, é bastante desafiador. Esquemas *upwind* de alta ordem têm sido uma alternativa eficaz para a discretização dos termos convectivos em EDPs que governam problemas de escoamento de fluidos no contexto dos métodos de diferenças finitas e volumes finitos [2, 4]. Os principais objetivos desses esquemas são manter a estabilidade da solução numérica, garantir a convergência e resolver descontinuidades ou choques sem oscilações numéricas ou, em casos extremos, com oscilações limitadas [18].

Para que um esquema numérico atinja todos os objetivos mencionados anteriormente, uma abordagem comum tem sido combinar as restrições do *Normalized Variable Diagram* (NVD) [10] ou limitadores de fluxo [15, 16] com as restrições *Total Variation Diminishing* (TVD) [8]. Outros critérios, como o *Convection Boundedness Criterion* (CBC) [7] e a condição *Boundedness, Accuracy, and Interpolative Reasonability* (BAIR) [13, 17], também são comumente utilizados na construção desses esquemas numéricos.

Destaca-se que a construção de esquemas *upwind* de alta resolução combinando curvas de Bézier [14] e restrições NVD/TVD, bem como os critérios de soluções limitadas CBC e BAIR, é

---

<sup>1</sup>pablo.cesar.r.o@gmail.com

<sup>2</sup>bernardomartinsrocha@ice.ufjf.br

<sup>3</sup>rafael.queiroz@ufop.edu.br

pouco explorada na literatura. Oviedo *et al.* [12] utilizam curvas cúbicas de Bézier para construir esquemas *upwind* que atendem às restrições NVD e TVD e, por conseguinte, satisfazem as condições BAIR e CBC.

Dentro deste contexto, este trabalho propõe um esquema *upwind* para o tratamento numérico do termo convectivo, baseado em curvas quadráticas de Bézier. O esquema desenvolvido, denominado *Second Order Bézier Upwind Scheme* (SOBUS), satisfaz concomitantemente as restrições NVD e as condições BAIR e CBC. Assim, este esquema requer um número menor de restrições para sua construção em comparação com o esquema derivado por Oviedo *et al.* [12].

## 2 Construção do Esquema SOBUS

Leonard [10] elaborou a formulação de variáveis normalizadas para desenvolver esquemas convectivos capazes de resolver gradientes elevados, mantendo simultaneamente a estabilidade das soluções numéricas. Considere as posições  $D$  (*Downstream*),  $R$  (*Remote-upstream*) e  $U$  (*Upstream*) em relação a uma face computacional  $f$  do estêncil computacional, conforme ilustrado na Figura 1. Dentro desse contexto, uma fórmula para uma variável  $\phi$ , expressa na abordagem de variáveis normalizadas, é dada por:

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}, \tag{1}$$

sendo que  $\phi_D$  e  $\phi_R$  são os valores não normalizados da quantidade  $\phi$  nos pontos  $D$  e  $R$ , respectivamente.

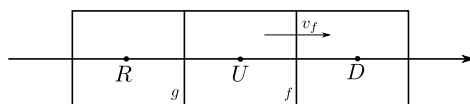


Figura 1: Posições  $D$ ,  $R$  e  $U$  em relação a face  $f$ . O sinal da velocidade  $v_f$  descreve a direção do fluxo. Fonte: dos autores.

Considerando a formulação de variáveis normalizadas [10], propõe-se o esquema SOBUS baseado em curvas de Bézier (ver [14]). Este esquema utiliza a curva quadrática de Bézier definida para  $\hat{\phi}_U \in [0, 1]$ . Além disso, o esquema adota as condições estabelecidas por Leonard [10] no NVD (ver Figura 2), ou seja, passa pelos pontos  $O(0, 0)$ ,  $Q(0, 5, 0, 75)$  e  $P(1, 1)$ , com inclinação igual a  $0,75$  em  $Q$ . Leonard [10] recomenda que, para  $\hat{\phi}_U \notin [0, 1]$ , deve-se usar o esquema FOU, isto é,  $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_U$ . Dessa forma, o esquema SOBUS satisfaz as condições BAIR [17] e CBC [7].

Para a sua construção, considera-se  $\hat{\phi}_U \in [0, 1]$  e os pontos de controle  $\{(0, 0), (a, b), (1, 1)\}$  no NVD (Figura 2). Assim, obtém-se a seguinte curva quadrática de Bézier  $C$ , dada por:

$$C(t) = (\hat{\phi}_U(t), \hat{\phi}_f(t)) = (2at + (1 - 2a)t^2, 2bt + (1 - 2b)t^2). \tag{2}$$

A curva  $C(t)$  deve satisfazer as condições de Leonard [10]; portanto, deve existir  $t_0 \in [0, 1]$  tal

que seja possível resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0,5 &= 2at_0 + (1 - 2a)t_0^2 \\ 0,75 &= 2bt_0 + (1 - 2b)t_0^2 \\ 0,75 &= \left. \frac{d\hat{\phi}_f}{d\hat{\phi}_U} \right|_{t=t_0} = \frac{2b + 2(1 - 2b)t_0}{2a + 2(1 - 2a)t_0} \end{cases} \quad (3)$$

A equação (3) consiste em um sistema de equações não lineares que pode ser resolvido para as incógnitas  $a$ ,  $b$  e  $t_0$ , obtendo-se os seguintes valores:

$$a = \frac{1}{6}(3 - \sqrt{3}), \quad b = \frac{3}{4} = 0,75, \quad t_0 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}). \quad (4)$$

A partir da equação (2), expressa-se  $\hat{\phi}_f$  em função de  $\hat{\phi}_U$ , eliminando o parâmetro  $t$  e substituindo os valores de  $a$  e  $b$ , obtendo-se:

$$\hat{\phi}_f = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\phi}_U + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}) + 3\sqrt{\frac{1}{6}(2 - \sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{3}\hat{\phi}_U}\right). \quad (5)$$

A partir da equação (5), define-se o esquema SOBUS em variáveis normalizadas, que, para  $\hat{\phi}_U \notin [0, 1]$ , utiliza o esquema FOU. Em suma, a formulação matemática em variáveis normalizadas do esquema SOBUS é dada por:

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\phi}_U + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}) + 3\sqrt{\frac{1}{6}(2 - \sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{3}\hat{\phi}_U}\right), & \hat{\phi}_U \in [0, 1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0, 1]. \end{cases} \quad (6)$$

Na Figura 2, é mostrado o esquema SOBUS no NVD. Nota-se que ele não está contido na região TVD; no entanto, está inteiramente contido na região BAIR, bem como na região CBC, que é a região triangular formada pelos pontos (0, 0), (0, 1) e (1, 1) no NVD.

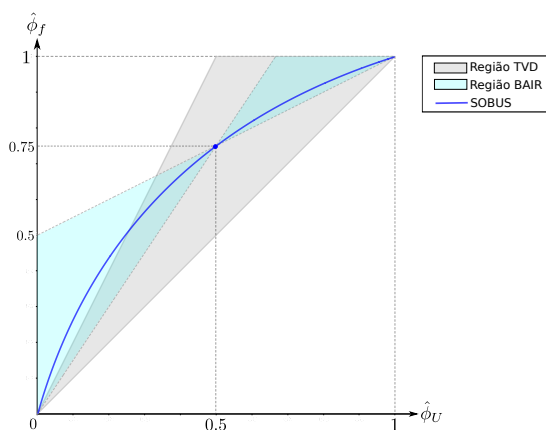


Figura 2: Esquema SOBUS representado no NVD. Fonte: dos autores.

### 3 Resultados Numéricos de Problemas 1D

#### 3.1 Resolução da Equação de Advecção Linear

A equação da advecção linear, que governa o transporte de quantidades escalares, é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{7}$$

sendo  $a$  a velocidade constante,  $u(x, t)$  a variável de interesse definida no domínio espacial  $\Omega = [x_L, x_R]$ , com  $t \in [0, t_f]$ , onde  $t_f$  é o tempo final. Para o teste numérico realizado, o problema da equação (7) foi resolvido considerando  $a = 1$ , o domínio  $\Omega = [-1, 1]$  e uma condição inicial suave (ver [1]) dada por:

$$u_0(x) = \sin^4(\pi x). \tag{8}$$

As condições de contorno periódicas nos limites esquerdo, em  $x = x_L$ , e direito, em  $x = x_R$ , foram consideradas para a solução numérica [6]. A solução exata conhecida [11] para este problema é dada por  $u(x, t) = u_0(x - at)$ .

Para os experimentos, foram adotadas malhas numéricas constituídas por  $N = \{80, 160, 320, 640\}$  células computacionais, com espaçamentos dados por  $\delta x = 2/N$ . O tempo final da simulação foi considerado como  $t_f = 0,5$ , e espaçamento temporal  $\delta t = 0,001\delta x$ . Na equação (7), o termo temporal é discretizado usando o método explícito de Euler.

A Tabela 1 apresenta os erros em diferentes normas, bem como as estimativas de precisão para os esquemas FOU [3], HPUS [6], SOBUS, SMART [7] e TOPUS [5], empregados para a aproximação do termo convectivo da equação (7). Observa-se que as soluções numéricas obtidas usando o esquema SOBUS apresentaram o menor erro em comparação com aquelas dos esquemas FOU, HPUS, TOPUS. No entanto, ao utilizar o esquema SMART, as soluções numéricas mostraram o menor erro entre todos os esquemas avaliados para este problema. Observa-se também que os esquemas, exceto o FOU, mantiveram uma precisão de segunda ordem em relação à norma  $L_1$  ( $\|E\|_1$ ).

#### 3.2 Resolução da Equação de Burgers

Os resultados numéricos para a ordem de convergência dos esquemas numéricos aplicados à equação de Burgers com viscosidade  $\nu > 0$  são apresentados nesta seção. Para o estudo de convergência numérica dos esquemas, foi considerado um caso com solução analítica, conforme estudado por [9]. O problema considerado é dado por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \Omega = [0, 1], \tag{9}$$

com as condições de contorno  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  e uma condição inicial suave  $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ , de modo que a solução exata, dada pela série de Fourier (ver [9]), é expressa por:

$$u(x, t) = 2\pi\nu \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2\pi^2\nu t) n \sin(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2\pi^2\nu t) n \cos(n\pi x)}, \tag{10}$$

sendo os coeficientes  $a_0$  e  $a_n$  definidos por:

$$a_0 = \int_0^1 \exp\{-(2\pi\nu)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\} dx, \tag{11}$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \exp\{-(2\pi\nu)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\} \cos(n\pi x) dx, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \tag{12}$$

Tabela 1: Estudo de convergência de esquemas *upwind* aplicados na resolução da equação de advecção linear.

Esquema	$N$	erro $\ E\ _1$	ordem $\ E\ _1$	erro $\ E\ _2$	ordem $\ E\ _2$	erro $\ E\ _\infty$	ordem $\ E\ _\infty$
SOBUS	80	$1,367 \times 10^{-2}$	—	$1,724 \times 10^{-2}$	—	$3,306 \times 10^{-2}$	—
	160	$3,684 \times 10^{-3}$	1,892	$5,167 \times 10^{-3}$	1,739	$1,245 \times 10^{-2}$	1,409
	320	$9,246 \times 10^{-4}$	1,994	$1,512 \times 10^{-3}$	1,773	$4,602 \times 10^{-3}$	1,436
	640	$2,256 \times 10^{-4}$	2,035	$4,381 \times 10^{-4}$	1,787	$1,682 \times 10^{-3}$	1,452
TOPUS	80	$2,321 \times 10^{-2}$	—	$2,830 \times 10^{-2}$	—	$4,643 \times 10^{-2}$	—
	160	$5,839 \times 10^{-3}$	1,991	$8,718 \times 10^{-3}$	1,699	$1,818 \times 10^{-2}$	1,353
	320	$1,447 \times 10^{-3}$	2,013	$2,576 \times 10^{-3}$	1,759	$6,880 \times 10^{-3}$	1,402
	640	$3,461 \times 10^{-4}$	2,064	$7,475 \times 10^{-4}$	1,785	$2,560 \times 10^{-3}$	1,426
HPUS	80	$1,628 \times 10^{-2}$	—	$2,017 \times 10^{-2}$	—	$3,739 \times 10^{-2}$	—
	160	$4,295 \times 10^{-3}$	1,923	$6,208 \times 10^{-3}$	1,700	$1,442 \times 10^{-2}$	1,375
	320	$1,074 \times 10^{-3}$	1,999	$1,853 \times 10^{-3}$	1,744	$5,435 \times 10^{-3}$	1,407
	640	$2,654 \times 10^{-4}$	2,017	$5,452 \times 10^{-4}$	1,765	$2,020 \times 10^{-3}$	1,428
SMART	80	$9,810 \times 10^{-3}$	—	$1,051 \times 10^{-2}$	—	$1,962 \times 10^{-2}$	—
	160	$2,524 \times 10^{-3}$	1,959	$2,990 \times 10^{-3}$	1,814	$6,660 \times 10^{-3}$	1,559
	320	$6,349 \times 10^{-4}$	1,991	$8,696 \times 10^{-4}$	1,782	$2,320 \times 10^{-3}$	1,521
	640	$1,582 \times 10^{-4}$	2,005	$2,572 \times 10^{-4}$	1,757	$9,500 \times 10^{-4}$	1,288
FOU	80	$2,180 \times 10^{-1}$	—	$1,820 \times 10^{-1}$	—	$1,873 \times 10^{-1}$	—
	160	$1,209 \times 10^{-1}$	0,851	$1,024 \times 10^{-1}$	0,829	$1,066 \times 10^{-1}$	0,814
	320	$6,397 \times 10^{-2}$	0,918	$5,476 \times 10^{-2}$	0,903	$5,718 \times 10^{-2}$	0,898
	640	$3,295 \times 10^{-2}$	0,957	$2,838 \times 10^{-2}$	0,948	$2,966 \times 10^{-2}$	0,947

O estudo de convergência foi realizado considerando malhas com espaçamentos dados por  $\delta x = 1/N$ , onde  $N = \{32, 64, 128, 256\}$ . As simulações foram realizadas com espaçamento temporal  $\delta t = 0,001\delta x$ , viscosidade  $\nu = 0, 1$  e tempo final  $t_f = 0, 8$ . Na equação (9), o termo temporal é discretizado pelo método explícito de Euler, e a derivada espacial de segunda ordem é aproximada por diferenças finitas de segunda ordem. A solução exata, dada pela equação (10), foi calculada numericamente usando um total de  $n = 100$  termos para garantir precisão numérica suficiente nos resultados.

Os resultados do estudo de convergência deste problema são apresentados na Tabela 2. Observa-se que os erros dos esquemas HPUS, SOBUS, SMART e TOPUS são praticamente os mesmos. Esses esquemas alcançaram precisão de segunda ordem, enquanto o esquema FOU apresentou precisão de primeira ordem, conforme esperado.

## 4 Considerações Finais

Este trabalho apresentou a formulação de um novo esquema *upwind* (SOBUS) para a aproximação do termo convectivo de EDPs. Esse esquema satisfaz critérios desejáveis de solução, como as condições BAIR e CBC; no entanto, não satisfaz a condição TVD como o esquema TOPUS.

As soluções numéricas obtidas com o esquema SOBUS são satisfatórias quando comparadas com as dos esquemas SMART e TOPUS, consagrados na literatura. Assim, o novo esquema demonstra ser uma alternativa promissora para lidar com problemas de transporte dominados por convecção na dinâmica dos fluidos computacional.

Como trabalhos futuros, pretende-se aplicar o esquema SOBUS a problemas da dinâmica dos fluidos modelados pelas equações de Navier-Stokes. Além disso, planeja-se analisar numericamente

Tabela 2: Estudo de convergência de esquemas *upwind* aplicados resolução da equação de Burgers.

Esquema	$N$	erro $\ E\ _1$	ordem $\ E\ _1$	erro $\ E\ _2$	ordem $\ E\ _2$	erro $\ E\ _\infty$	ordem $\ E\ _\infty$
SOBUS	32	$1,120 \times 10^{-3}$	—	$1,256 \times 10^{-3}$	—	$1,651 \times 10^{-3}$	—
	64	$3,004 \times 10^{-4}$	1,899	$3,373 \times 10^{-4}$	1,896	$4,357 \times 10^{-4}$	1,922
	128	$7,877 \times 10^{-5}$	1,931	$8,848 \times 10^{-5}$	1,931	$1,133 \times 10^{-4}$	1,944
	256	$2,070 \times 10^{-5}$	1,928	$2,328 \times 10^{-5}$	1,926	$2,964 \times 10^{-5}$	1,934
TOPUS	32	$1,029 \times 10^{-3}$	—	$1,148 \times 10^{-3}$	—	$1,553 \times 10^{-3}$	—
	64	$2,878 \times 10^{-4}$	1,838	$3,223 \times 10^{-4}$	1,833	$4,229 \times 10^{-4}$	1,876
	128	$7,708 \times 10^{-5}$	1,901	$8,650 \times 10^{-5}$	1,898	$1,116 \times 10^{-4}$	1,922
	256	$2,048 \times 10^{-5}$	1,912	$2,303 \times 10^{-5}$	1,909	$2,943 \times 10^{-5}$	1,923
HPUS	32	$1,054 \times 10^{-3}$	—	$1,188 \times 10^{-3}$	—	$1,604 \times 10^{-3}$	—
	64	$2,914 \times 10^{-4}$	1,854	$3,282 \times 10^{-4}$	1,855	$4,299 \times 10^{-4}$	1,900
	128	$7,760 \times 10^{-5}$	1,909	$8,733 \times 10^{-5}$	1,910	$1,126 \times 10^{-4}$	1,933
	256	$2,055 \times 10^{-5}$	1,917	$2,314 \times 10^{-5}$	1,916	$2,956 \times 10^{-5}$	1,929
SMART	32	$1,212 \times 10^{-3}$	—	$1,363 \times 10^{-3}$	—	$1,736 \times 10^{-3}$	—
	64	$3,130 \times 10^{-4}$	1,953	$3,520 \times 10^{-4}$	1,953	$4,487 \times 10^{-4}$	1,952
	128	$8,042 \times 10^{-5}$	1,961	$9,040 \times 10^{-5}$	1,961	$1,149 \times 10^{-4}$	1,965
	256	$2,090 \times 10^{-5}$	1,944	$2,352 \times 10^{-5}$	1,942	$2,984 \times 10^{-5}$	1,945
FOU	32	$1,119 \times 10^{-2}$	—	$1,338 \times 10^{-2}$	—	$1,803 \times 10^{-2}$	—
	64	$5,965 \times 10^{-3}$	0,908	$7,181 \times 10^{-3}$	0,898	$9,641 \times 10^{-3}$	0,903
	128	$3,077 \times 10^{-3}$	0,955	$3,713 \times 10^{-3}$	0,951	$4,976 \times 10^{-3}$	0,954
	256	$1,562 \times 10^{-3}$	0,978	$1,887 \times 10^{-3}$	0,976	$2,528 \times 10^{-3}$	0,977

a formulação com limitador de fluxo do esquema SOBUS.

## Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pelas agências brasileiras CAPES, CNPq e FAPEMIG. Agradecemos o apoio dessas instituições. A pesquisa recebeu financiamento da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - Brasil - Código Financeiro 001. O trabalho foi também apoiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) sob os números de processos 310722/2021-7 e 423278/2021-5.

## Referências

- [1] D. S. Balsara e C.-W. Shu. “Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy”. Em: **Journal of Computational Physics** 160.2 (2000), pp. 405–452.
- [2] M. A. C. Candezano, L. Corrêa, E. R. Cirilo e R. A. B. de Queiroz. “Numerical simulation of upwinding schemes applied to complex fluid dynamics equations”. Em: **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering** 41.429 (2019), pp. 1–15.

- [3] R. Courant, E. Isaacson e M. Rees. “On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences”. Em: **Communications on Pure and Applied Mathematics** 5.3 (1952), pp. 243–255.
- [4] V. G. Ferreira, R. A. B. Queiroz, M. A. C. Candezano, G. A. B. Lima, L. Corrêa, C. M. Oishi e F. L. P. Santos. “Simulation results and applications of an advection bounded scheme to practical flows”. Em: **Computational & Applied Mathematics** 31.3 (2012).
- [5] V. G. Ferreira, R. A. B. de Queiroz, G. A. B. Lima, R. G. Cuenca, C. M. Oishi, Azevedo J. L. F e S. McKee. “A bounded upwinding scheme for computing convection-dominated transport problems”. Em: **Computers & Fluids** 57 (2012), pp. 208–224.
- [6] W. Gao, H. Li e Y. Liu. “A high resolution NV/TVD Hermite polynomial upwind scheme for convection-dominated problems”. Em: **Mathematical Methods in the Applied Sciences** 36.9 (2013), pp. 1107–1122.
- [7] P. H. Gaskell e A. K. C. Lau. “Curvature-compensated convective transport: SMART, a new boundedness-preserving transport algorithm”. Em: **International Journal for Numerical Methods in Fluids** 8.6 (1988), pp. 617–641.
- [8] A. Harten. “High resolution schemes for hyperbolic conservation laws”. Em: **Journal of Computational Physics** 49 (3 1983), pp. 357–393.
- [9] S. Kutluay, A. Esen e I. Dag. “Numerical solutions of the Burgers’ equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method”. Em: **Journal of Computational and Applied Mathematics** 167.1 (2004), pp. 21–33.
- [10] B. P. Leonard. “Simple high-accuracy resolution program for convective modelling of discontinuities”. Em: **International Journal for Numerical Methods in Fluids** 8.10 (1988), pp. 1291–1318.
- [11] K. W. Morton e D. F. Mayers. **Numerical Solution of Partial Differential Equations**. 2nd. Cambridge University Press, 2005.
- [12] P. C. R. Oviedo, M. T. Magalhães, B. M. Rocha e R. A. B. de Queiroz. “A bounded scheme based on Bézier curves for convection-dominated transport problems”. Em: **Journal of Computational and Applied Mathematics** 437 (2024), p. 115502.
- [13] H. Ping-Li, T. Wen-Quan e Y. Mao-Zheng. “Refinement of the convective boundedness criterion of Gaskell and Lau”. Em: **Engineering Computations** 20.8 (2003), pp. 1023–1043.
- [14] H. Prautzsch, W. Boehm e M. Paluszny. **Bézier and B-spline techniques**. Springer, 2002.
- [15] P. K. Sweby. “High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws”. Em: **SIAM Journal on Numerical Analysis** 21.5 (1984), pp. 995–1011.
- [16] N. P. Waterson e H. Deconinck. “Design principles for bounded higher-order convection schemes - a unified approach”. Em: **Journal of Computational Physics** 224 (1 2007), pp. 182–207.
- [17] J.-J. Wei, B. Yu, W.-Q. Tao, Y. Kawaguchi e H.-s. Wang. “A new high-order-accurate and bounded scheme for incompressible flow”. Em: **Numerical Heat Transfer: Part B** 43.1 (2003), pp. 19–41.
- [18] D. Zhang, C. Jiang, D. Liang e L. Cheng. “A review on TVD schemes and a refined flux-limiter for steady-state calculations”. Em: **Journal of Computational Physics** 302 (2015), pp. 114–154.