

# Homogeneização de uma Barra Não Periódica Funcionalmente Graduada via Método de Dois Espaços

Leslie D. Pérez-Fernández<sup>1</sup>

UFPel, Pelotas, RS

Julián Bravo-Castillero<sup>2</sup>

UNAM, Mérida, México

Fabio C. da Rocha<sup>3</sup>

UFS, São Cristóvão, SE

Maria S. M. Sampaio<sup>4</sup>

UEA, Manaus, AM

**Resumo.** Apresenta-se a aplicação do método de homogeneização não periódica de dois espaços para modelar o comportamento efetivo de uma barra micro-heterogênea funcionalmente graduada com comportamento constitutivo linear. Um exemplo é apresentado para ilustrar o fato de que a solução exata do problema que modela o comportamento da barra tende para a solução do chamado problema homogeneizado que modela o comportamento da barra homogênea equivalente obtido da aplicação do método de dois espaços.

**Palavras-chave.** Barra Micro-Heterogênea Funcionalmente Graduada, Método de Dois Espaços de Homogeneização Assintótica Não Periódica, Solução Assintótica Formal, Coeficiente Efetivo, Problema Homogeneizado

## 1 Introdução

Materiais micro-heterogêneos apresentam separação de escalas estruturais (caracterizada pelo parâmetro geométrico pequeno  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ ) e continuidade da microestrutura. Como consequência, a hipótese de homogeneidade equivalente garante que existe um material homogêneo ideal com propriedades físicas constantes que são, de fato, as propriedades efetivas do material micro-heterogêneo ao qual equivale esse material homogêneo [12]. O processo de obtenção tal material homogêneo equivalente chama-se *homogeneização*.

Do ponto de vista matemático, o comportamento físico de interesse do material micro-heterogêneo é modelado por problema cujas equações diferenciais têm coeficientes de variação rápida induzida pela microestrutura pelo menos localmente. Por outro lado, as equações diferenciais do modelo do material homogêneo equivalente têm coeficientes constantes chamados de efetivos, os quais, correspondem às propriedades efetivas do material micro-heterogêneo estudado. A Figura 1 apresenta três possíveis comportamentos induzidos pela microestrutura do coeficiente de uma barra micro-heterogênea funcionalmente graduada com heterogeneidade (a) periódica, (b) não periódica com variação rápida localizada, e (c) não periódica mas localmente periódica, respectivamente, para valores decrescentes de  $\varepsilon$ , ilustrando assim sua variação rápida para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

---

<sup>1</sup>leslie.fernandez@ufpel.edu.br

<sup>2</sup>julian@mym.iimas.unam.mx

<sup>3</sup>fabiocrocha@academico.ufs.br

<sup>4</sup>msampaio@uea.edu.br

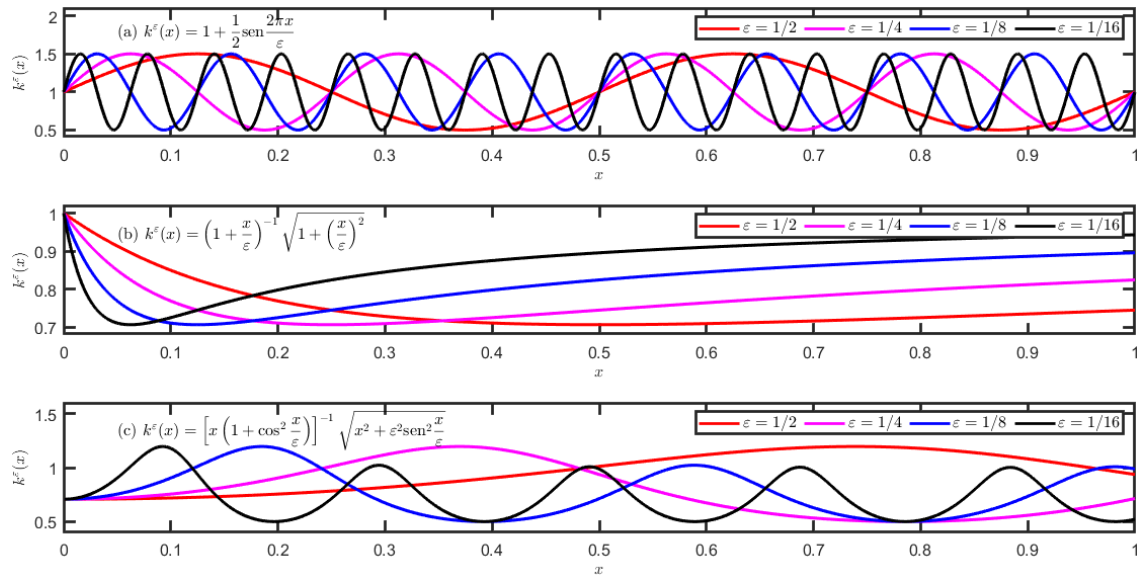


Figura 1: Exemplos de coeficiente constitutivo (a) periódico, (b) não periódico de variação rápida localizada, e (c) não periódico mas localmente periódico.

Métodos tradicionais de homogeneização matemática (tais como convergência em duas escalas [1, 10], homogeneização assintótica [2, 3],  $\Sigma$ -,  $G$ -,  $\Gamma$ - e  $H$ -convergências [4, 9, 11, 15], homogeneização de tangente de segunda ordem [13, 14], funções teste oscilantes [19]) assumem que a microestrutura dos materiais heterogêneos cujos modelos pretendem resolver é periódica. Inclusive, uma abordagem comum no estudo de materiais heterogêneos com microestrutura aleatória é aproximá-la mediante a replicação periódica de um elemento representativo de volume [8, 16–18]. Uma alternativa para homogeneizar materiais micro-heterogêneos não periódicos é o *método de dois espaços* [6, 7].

O método de dois espaços é um método de homogeneização assintótica não periódica baseado na construção de uma solução assintótica formal (SAF) na forma de uma série de potências de  $\epsilon$  em duas escalas. Os coeficientes funcionais biescalares das potências de  $\epsilon$  são obtidos como soluções da recorrência de problemas obtida de substituir a SAF no problema que modela o comportamento de interesse do material micro-heterogêneo sob estudo. Mais especificamente, dessa recorrência obtém-se os chamados problemas homogeneizado e locais. De fato, o problema homogeneizado modela o comportamento do material homogêneo equivalente e os coeficientes constantes de suas equações diferenciais são as propriedades efetivas do material micro-heterogêneo.

Neste trabalho, apresenta-se a aplicação do método de dois espaços para modelar o comportamento efetivo de uma barra micro-heterogênea funcionalmente graduada com comportamento constitutivo linear. Um exemplo é apresentado para ilustrar o fato de que a solução exata do problema que modela o comportamento da barra tende para a solução do chamado problema homogeneizado que modela o comportamento da barra homogênea equivalente obtido da aplicação do método de dois espaços.

## 2 Metodologia

### 2.1 Problemas original e homogeneizado e relação entre suas soluções

Considere o problema de encontrar  $u^\varepsilon \in C^2([0, 1])$  tal que

$$\frac{d}{dx} \left[ \kappa^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right] + f^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad u^\varepsilon(0) = 0, \quad \frac{du^\varepsilon}{dx} \Big|_{x=1} = 0, \quad (1)$$

em que  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $\kappa^\varepsilon \in C^1([0, 1])$ ,  $\kappa^\varepsilon(x) = \kappa(x, x/\varepsilon)$ , é estritamente positiva e limitada, e  $f^\varepsilon \in C([0, 1])$ ,  $f^\varepsilon(x) = f(x, x/\varepsilon)$ . A solução do problema (1) é obtida por integração direta como

$$u^\varepsilon(x) = \int_0^x \frac{1}{\kappa^\varepsilon(s)} \int_s^1 f^\varepsilon(t) dt ds. \quad (2)$$

No contexto da eletrostática, por exemplo, sendo  $u^\varepsilon(x)$  o potencial eletrostático e  $-du^\varepsilon/dx$  o campo elétrico, o problema (1) modela o estado de equilíbrio de uma barra dielétrica linear com permitividade  $\kappa^\varepsilon(x)$  e densidade de cargas livres  $f^\varepsilon(x)$ , com uma extremidade com potencial nulo e a outra extremidade com deslocamento elétrico nulo, ou seja,  $[-\kappa^\varepsilon(x) du^\varepsilon/dx]_{x=1} = 0$ . Interpretações semelhantes podem ser feitas nos contextos das condutividades elétrica e térmica, da magnetostática, e da elasticidade linear entre outros (ver também Cap. 12, Vol. II, de [5]).

Do ponto de vista da homogeneização matemática, a questão norteadora é: existe  $u^0 \in C^2([0, 1])$  tal que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u^\varepsilon(x) = u^0(x)$ ? A resposta é a solução

$$u^0(x) = \int_0^x \frac{1}{\kappa^0(s)} \int_s^1 f^0(t) dt ds \quad (3)$$

do problema homogeneizado

$$\frac{d}{dx} \left[ \kappa^0(x) \frac{du^0}{dx} \right] + f^0(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad u^0(0) = 0, \quad \frac{du^0}{dx} \Big|_{x=1} = 0, \quad (4)$$

em que o coeficiente efetivo  $\kappa^0(x)$  e o termo independente médio  $f^0(x)$  são obtidos como

$$g^0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} g^\varepsilon(s) ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon}{\Delta x} \int_{\frac{x}{\varepsilon}}^{\frac{x}{\varepsilon} + \frac{\Delta x}{\varepsilon}} g(x, y) dy = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y - y_0} \int_{y_0}^y g(x, s) ds, \quad (5)$$

em que  $g \in \{1/\kappa, f\}$ , ou seja,

$$\kappa^0(x) = \left( \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y - y_0} \int_{y_0}^y \frac{ds}{\kappa(x, s)} \right)^{-1}, \quad f^0(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y - y_0} \int_{y_0}^y f(x, s) ds. \quad (6)$$

**Proposição.** *Seja  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Sejam  $u^\varepsilon, u^0 \in C^2([0, 1])$  as soluções (2) e (3) dos problemas original (1) e homogeneizado (4), respectivamente. Então,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u^\varepsilon(x) = u^0(x)$ . ■*

Para mostrar a proposição anterior, emprega-se o teorema de Keller [6] enunciado a seguir:

**Teorema.** *Seja  $\varphi^\varepsilon \in C([0, 1])$  tal que  $\varphi^\varepsilon(x) = \varphi(x, x/\varepsilon)$  e*

$$(i) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \in C([0, 1]), \quad (ii) \exists B \in \mathbb{R}_+^* : \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right| \leq B, \quad \forall x \in [0, 1], \quad \forall \varepsilon > 0,$$

$$(iii) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon}{\Delta x} \int_{\frac{x}{\varepsilon}}^{\frac{x}{\varepsilon} + \frac{\Delta x}{\varepsilon}} \varphi(x, y) dy \text{ existe uniformemente em } x, \quad \forall x \in [0, 1], \text{ independente de } \Delta x.$$

$$\text{Então, } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^x \varphi^\varepsilon(s) ds = \int_0^x \varphi^0(s) ds, \text{ em que } \varphi^0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon}{\Delta x} \int_{\frac{x}{\varepsilon}}^{\frac{x}{\varepsilon} + \frac{\Delta x}{\varepsilon}} \varphi(x, y) dy. \quad \blacksquare$$

**Demonstração da proposição.** Sendo  $\varphi^\varepsilon(x)$  o integrando de (2), cumprem-se as condições do teorema de Keller. Logo, levando em conta (5), tem-se que  $\varphi^0(x)$  é o integrando de (3) e

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u^\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^x \frac{1}{\kappa^\varepsilon(s)} \int_s^1 f^\varepsilon(t) dt ds = \int_0^x \frac{1}{\kappa^0(s)} \int_s^1 f^0(t) dt ds = u^0(x). \quad \blacksquare$$

Logo, sendo  $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^2([0, 1])$  a solução do problema original (1), se existem os limites em (6), então existe  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u^\varepsilon(x) = u^0(x)$ , sendo  $u^0 \in \mathcal{C}^2([0, 1])$  a solução do problema homogeneizado (4).

Na próxima subseção, apresenta-se a obtenção do problema homogeneizado (4) a partir do problema original (1) mediante a aplicação do método de dois espaços.

## 2.2 Aplicação do método de dois espaços

Procura-se uma SAF do problema (1) da forma

$$u^\varepsilon(x) \sim u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (7)$$

com  $u_k(x, y)$ ,  $\partial u_k / \partial x$  e  $\partial u_k / \partial y$ ,  $k \in \{0, 1, 2\}$ , contínuas e limitadas. De substituir (7) na equação diferencial do problema (1) levando em conta a regra da cadeia, tem-se, depois de agrupar por potências de  $\varepsilon$ , que

$$\varepsilon^{-2} \mathcal{L}_{yy} u_0 + \varepsilon^{-1} (\mathcal{L}_{yy} u_1 + \mathcal{L}_{yx} u_0 + \mathcal{L}_{xy} u_0) + \varepsilon^0 (\mathcal{L}_{yy} u_2 + \mathcal{L}_{yx} u_1 + \mathcal{L}_{xy} u_1 + \mathcal{L}_{xx} u_0 + f) = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (8)$$

em que  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  representa a coleção dos termos das potências positivas de  $\varepsilon$ , os quais tendem para 0 quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , e  $\mathcal{L}_{\alpha\beta}(\cdot)$ ,  $\alpha, \beta \in \{x, y\}$ , são operadores diferenciais lineares definidos por

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \kappa(x, y) \frac{\partial(\cdot)}{\partial \beta} \right], \quad \alpha, \beta \in \{x, y\}. \quad (9)$$

Para (8) ser satisfeita quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , os coeficientes das potências não positivas de  $\varepsilon$  devem anular-se, o qual produz a seguinte recorrência de equações diferenciais para  $u_k(x, y)$ ,  $k \in \{0, 1, 2\}$ :

$$\varepsilon^{-2} : \mathcal{L}_{yy} u_0 = 0, \quad (10)$$

$$\varepsilon^{-1} : \mathcal{L}_{yy} u_1 + \mathcal{L}_{yx} u_0 + \mathcal{L}_{xy} u_0 = 0, \quad (11)$$

$$\varepsilon^0 : \mathcal{L}_{yy} u_2 + \mathcal{L}_{yx} u_1 + \mathcal{L}_{xy} u_1 + \mathcal{L}_{xx} u_0 + f(x, y) = 0, \quad (12)$$

as quais devem ser complementadas com as condições de contorno que resultam de substituir a SAF (7) nas condições de contorno do problema original (1).

Observe que, para  $x$  fixo, as equações diferenciais na recorrência (10)-(12) são da forma

$$\frac{d}{dy} \left[ K(y) \frac{dN}{dy} \right] + F(y) = 0, \quad y \in \left( 0, \frac{1}{\varepsilon} \right), \quad (13)$$

em que  $K(y) = \kappa(x, y)$  e  $N(y) = u_k(x, y)$ ,  $k \in \{0, 1, 2\}$ . Para resolver (13), faz-se o seguinte:

1. Integra-se (13) em  $(y_0, y) \subset (0, 1/\varepsilon)$ ,  $y_0$  fixo, para obter

$$K(y) \frac{dN}{dy} = K(y_0) \frac{dN}{ds} \Big|_{s=y_0} - \int_{y_0}^y F(s) ds. \quad (14)$$

2. Levando em conta que  $K(y) > 0$ , isola-se  $dN/dy$  em (14) e integra-se em  $(y_0, y)$  para ter

$$N(y) - N(y_0) = K(y_0) \frac{dN}{ds} \Big|_{s=y_0} \int_{y_0}^y \frac{ds}{K(s)} - \int_{y_0}^y \frac{1}{K(s)} \int_{y_0}^s F(t) dt ds. \quad (15)$$

3. Considerando que  $N(y)$  é limitado, que  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  implica  $y \rightarrow +\infty$ , e que a primeira definição em (6) produz  $K^0$ , divide-se (15) por  $y - y_0$  e passa-se ao limite quando  $y \rightarrow +\infty$  para ter-se

$$K(y_0) \frac{dN}{ds} \Big|_{s=y_0} \frac{1}{K^0} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y - y_0} \int_{y_0}^y \frac{1}{K(s)} \int_{y_0}^s F(t) dt ds. \quad (16)$$

4. O próximo passo depende de caso particular, ou seja, de qual  $N(y) = u_k(x, y)$ ,  $k \in \{0, 1, 2\}$ .

A aplicação dos passos 1-4 à recorrência (10)-(12) produz os seguintes resultados:

- De (10), resulta que  $u_0(x, y)$  não depende de  $y$ . Notação:  $u_0(x, y) = u^0(x)$ . Assim, (11) transforma-se em

$$\mathcal{L}_{yy} u_1 = - \frac{\partial \kappa}{\partial y} \frac{du^0}{dx}. \quad (17)$$

- De (17), resulta o coeficiente efetivo  $\kappa^0(x)$  como em (6), e

$$u_1(x, y) = N_1(x, y) \frac{du^0}{dx} + u_1(0, 0), \quad N_1(x, y) = \kappa^0(x) \int_0^y \frac{ds}{\kappa(x, s)} - y. \quad (18)$$

- De (12), depois de atualizar, obtém-se a equação diferencial do problema homogeneizado (4) com o termo independente médio  $f^0(x)$  como em (6).

Finalmente, as condições de contorno do problema homogeneizado (4) seguem de substituir a versão atualizada da SAF (7) nas condições do problema original (1).

Na próxima seção, apresenta-se um exemplo ilustrativo dos resultados teóricos acima.

### 3 Exemplo

Considere o problema (1) com coeficiente (ver Figura 1(b))

$$\kappa^\varepsilon(x) = \left(1 + \frac{x}{\varepsilon}\right)^{-1} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2} \quad (19)$$

e termo independente  $f^\varepsilon(x) = 1$ , de maneira que sua solução (2) é

$$u^\varepsilon(x) = \varepsilon \left[ 1 - \varepsilon - \left(\frac{\varepsilon}{2} + 1\right) \operatorname{arcsinh} \frac{x}{\varepsilon} \right] + \left(\frac{x}{2} + \varepsilon - 1\right) \sqrt{\varepsilon^2 + x^2}, \quad (20)$$

o coeficiente efetivo é  $\kappa^0 = 1$ , o termo independente médio é  $f^0 = 1$ , e a solução do problema homogeneizado (4) é

$$u^0(x) = \frac{x^2}{2} - x. \quad (21)$$

Observe que (20) e (21) são tais que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u^\varepsilon(x) = u^0(x)$ , como ilustrado na Figura 2.

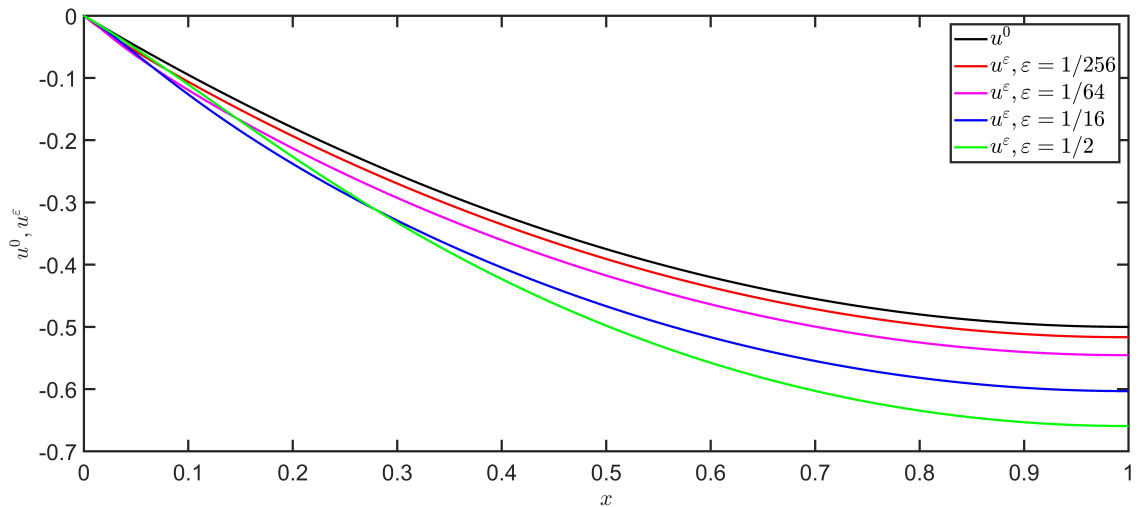


Figura 2: As soluções exata  $u^\varepsilon(x)$  e homogeneizada  $u^0(x)$ , dadas por (20) e (21), respectivamente, são tais que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u^\varepsilon(x) = u^0(x)$ .

## 4 Considerações Finais

Neste trabalho, apresentou-se a aplicação do método de homogeneização assintótica não periódica de dois espaços para a obtenção do comportamento efetivo de uma barra micro-heterogênea funcionalmente graduada com comportamento constitutivo linear. Um exemplo foi apresentado para ilustrar o fato de que a solução exata do problema que modela o comportamento dessa barra tende para a solução do problema homogeneizado que modela o comportamento da barra homogênea equivalente obtido da aplicação do método de dois espaços quando o parâmetro geométrico que caracteriza a separação de escalas tende para zero. Finalmente, observe que a metodologia apresentada pode ser generalizada naturalmente para modelar situações tridimensionais em que a heterogeneidade ocorre em uma direção (por exemplo, esferas e cilindros centrossimétricos com heterogeneidade na direção radial e compósitos laminados com lâminas funcionalmente graduadas).

## Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) via Projeto Universal N<sup>o</sup> 402857/2021-6. JBC agradece o apoio do PROEC/UFS via Edital CAPES N<sup>o</sup> 14/2023 do Programa de Redução de Assimetrias na Pós-Graduação (PRAPG).

## Referências

- [1] G. Allaire. “Homogenization and two-scale convergence”. Em: **SIAM Journal on Mathematical Analysis** 23 (1992), pp. 1482–1518. DOI: 10.1137/0523084.
- [2] N. S. Bakhvalov e G. P. Panasenko. **Homogenisation: averaging processes in periodic media**. 1a. ed. Dordrecht: Kluwer, 1989. ISBN: 9789401075060.
- [3] A. Bensoussan, J.-L. Lions e G. Papanicolau. **Asymptotic analysis for periodic structures**. 1a. ed. Amsterdam: North-Holland, 1978. ISBN: 9780444851727.

- [4] E. De Giorgi. “ $G$ -operators and  $\Gamma$ -convergence”. Em: **Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vol. 2)**. 1984, pp. 1175–1191. ISBN: 0444866694.
- [5] R. P. Feynman, R. B. Leighton e M. Sands. **The Feynman Lectures on Physics**. Online ed. (feynmanlectures.caltech.edu). Pasadena: California Institute of Technology, 2013.
- [6] J. B. Keller. “Darcy’s law for flow in porous media and the two-space method”. Em: **Nonlinear Partial Equations in Engineering and Applied Science: Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics**. Ed. por R. L. Sternberg, A. J. Kalinowski e J. S. Papadakis. Vol. 54. Dekker, 1980. Cap. 27, pp. 429–443. ISBN: 0824769961.
- [7] J. B. Keller. “Effective behavior of heterogeneous media”. Em: **Proceedings of the Symposium on Statistical Mechanics and Statistical Methods in Theory and Applications**. 1977, pp. 631–644. DOI: 10.10007/978-1-4613-4166-6.
- [8] R. Lipton e D. R. S. Talbot. “Bounds for the effective conductivity of a composite with an imperfect interface”. Em: **Proceedings of the Royal Society of London A** 457 (2001), pp. 1501–1517. DOI: 10.1098/rspa.2000.0775.
- [9] F. Murat e L. Tartar. “ $H$ -convergence”. Em: **Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications**. Ed. por A. Cherkaev e R. Kohn. Vol. 31. Springer, 1997. Cap. 3, pp. 21–43. DOI: 10.1007/978-1-4612-2032-9\_3.
- [10] G. Nguetseng. “A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization”. Em: **SIAM Journal on Mathematical Analysis** 20 (1989), pp. 608–623. DOI: 10.1137/0520043.
- [11] G. Nguetseng. “Homogenization structures and applications I”. Em: **Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen** 22 (2003), pp. 73–108. DOI: 10.4171/ZAA/1133.
- [12] G. P. Panasenko. “Homogenization for periodic media: from microscale to macroscale”. Em: **Physics of Atomic Nuclei** 71 (2008), pp. 681–694. DOI: 10.1134/S106377880804008X.
- [13] P. Ponte Castañeda. “Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations: I-theory”. Em: **Journal of the Mechanics and Physics of Solids** 50 (2002), pp. 737–757. DOI: 10.1016/S0022-5096(01)00099-0.
- [14] P. Ponte Castañeda e E. Tiberio. “A second-order homogenization method in finite elasticity and applications to black-filled elastomers”. Em: **Journal of the Mechanics and Physics of Solids** 48 (2000), pp. 1389–1411. DOI: 10.1016/S0022-5096(99)00087-3.
- [15] S. Spagnolo. “Convergence in energy for elliptic operators”. Em: **Proceedings of the Third Symposium on the Numerical Solution of Partial Differential Equations**. 1976, pp. 469–499. DOI: 10.1016/B978-0-12-358503-5.50021-X.
- [16] D. R. S. Talbot. “Bounds which incorporate morphological information for a nonlinear composite dielectric”. Em: **Proceedings of the Royal Society of London A** 455 (1999), pp. 3617–3628. DOI: 10.1098/rspa.1999.0468.
- [17] D. R. S. Talbot. “Improved bounds for the effective properties of a nonlinear two-phase elastic composite”. Em: **Journal of the Mechanics and Physics of Solids** 48 (2000), pp. 1285–1294. DOI: 10.1016/S0022-5096(99)00084-8.
- [18] D. R. S. Talbot e J. R. Willis. “Bounds for the effective constitutive relation of a nonlinear composite”. Em: **Proceedings of the Royal Society of London A** 460 (2004), pp. 2705–2723. DOI: 10.1098/rspa.2004.1309.
- [19] L. Tartar. **The General Theory of Homogenization: A Personalized Introduction**. 1a. ed. Heidelberg: Springer, 2009. ISBN: 9783642051944.