

# Modelagem Numérica de Escoamento em Canais via Sistema de Saint-Venant-Exner

Thiago F. C. Carrenho<sup>1</sup>, Maicon R. Correa<sup>2</sup>  
IMECC/Unicamp, Campinas, SP

**Resumo.** Neste trabalho apresentamos a modelagem do escoamento de água em canais naturais de seção transversal retangular com leito erodível por meio do sistema de Saint-Venant-Exner. Em seguida descrevemos o método Ying-Khan-Wang para a resolução numérica de tal sistema de forma desacoplada em três passos. Tal método consiste em um esquema de volumes finitos do tipo Upwind conservativo e bem balanceado. Por fim, apresentamos simulações do escoamento em canais acoplado com efeitos erosivos no leito e tecemos considerações sobre as condições para que a dinâmica esteja em estado de equilíbrio.

**Palavras-chave.** Hidrodinâmica, Transporte de Sedimentos, Saint-Venant-Exner, Métodos Numéricos.

## 1 Introdução

O estudo e a modelagem numérica de escoamentos em canais naturais são de grande importância pública, especialmente em casos de cheias e de rompimento de barragens, permitindo uma análise preditiva e aumentando a segurança das comunidades próximas. Nos casos de rios, por exemplo, a água causa erosão do solo e transporta estes sedimentos erodidos, sendo assim necessário acoplar o transporte de sedimentos à hidrodinâmica.

No presente trabalho apresentamos a modelagem do escoamento de água em canais naturais abertos com leito erodível a partir do sistema de Saint-Venant-Exner, que consiste em um conjunto de equações diferenciais parciais composto pelas equações de conservação de massa d'água, de balanço de momento linear (equações de Saint-Venant) e de conservação de massa de sedimentos (equação de Exner). Estas leis de conservação formam um sistema hiperbólico que não possui forma conservativa. A partir deste modelo implementamos o método Ying-Khan-Wang para as equações de Saint-Venant e acoplamos a ele a resolução da equação de Exner. Por fim, utilizamos esta metodologia para simular casos de hidrodinâmica com transporte de sedimentos.

## 2 Modelagem Matemática

Considere um canal natural de fluxo essencialmente unidirecional e raso, isto é, seu comprimento é significativamente maior que sua profundidade. Neste caso, o escoamento de um fluido newtoniano, como a água, pode ser modelado por meio das equações de Saint-Venant [1, 3], forma unidimensional das equações de águas rasas. Considere também que o leito deste canal é erodível, e a erosão, o transporte e a deposição dos sedimentos no leito do canal podem ser modeladas por meio da equação de Exner [2].

---

<sup>1</sup>t224831@dac.unicamp.br

<sup>2</sup>maicon@ime.unicamp.br

Seja  $x$  [m] a distância de um ponto no canal a um ponto de referência, geralmente o início do canal, como mostrado na Figura 1a. Assim, para cada posição  $x$  num instante de tempo  $t$  [s] temos uma seção transversal do rio. Neste trabalho consideramos que todas as seções transversais são retangulares, como ilustrado na Figura 1b. Assumimos que o canal possui comprimento  $L$  [m], isto é, o domínio espacial do problema é  $\Omega = (0, L)$ , e consideramos um intervalo de tempo  $I = (t_0, T)$ , onde  $t_0$  [s] e  $T$  [s] são os tempos inicial e final da dinâmica do fluido.

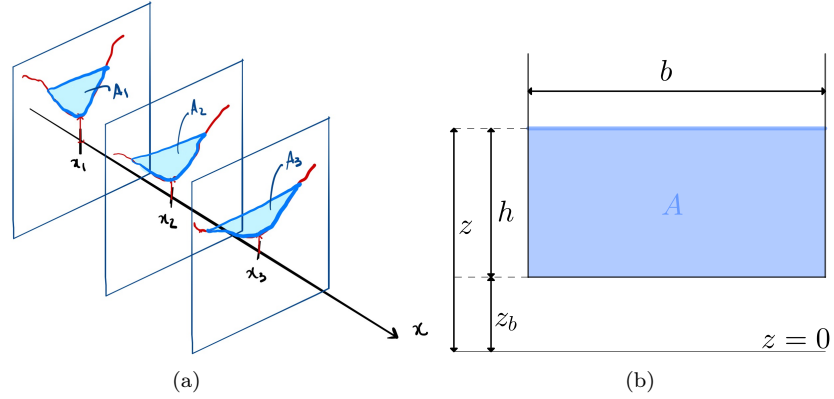


Figura 1: Canal dividido em seções transversais. Fonte: dos autores.

Neste modelo, para um instante  $t \in I$  e um ponto  $x \in \Omega$ ,  $b(x)$  [m] é a largura do canal, a profundidade da água é dada por  $h(x, t)$  [m], e, a partir de um horizonte de referência apresentado como  $z = 0$ , medimos a altura de água  $z(x, t)$  [m] e a cota do leito,  $z_b(x, t)$  [m], de forma que  $z = z_b + h$ . Resolveremos as equações de Saint-Venant em termos da área molhada  $A(x, t)$  [m<sup>2</sup>] e da vazão  $Q(x, t)$  [m<sup>3</sup>/s], que mede o volume d'água que atravessa tal seção transversal no determinado instante de tempo.

Diante destas variáveis, o sistema de Saint-Venant-Exner [4] é composto por três leis de conservação: equação de conservação de massa de água, equação de balanço de momento linear e equação de conservação de massa de sedimentos, dadas respectivamente por

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) = -gA \left( \frac{\partial z}{\partial x} + S_f \right), \quad (1b)$$

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial q_b(v)}{\partial x} = 0, \quad (1c)$$

nas quais  $S_f$  [−] representa a força de atrito entre a água e o solo, dado por

$$S_f = \frac{n_M^2 |Q|}{AR^{4/3}} Q, \quad (2)$$

onde  $n_M$  [s/m<sup>1/3</sup>] é o coeficiente de rugosidade de Manning,  $R$  [m] o raio hidráulico, que é definido como a razão entre a área da seção transversal molhada e o perímetro molhado, sendo dado para canais retangulares por  $R = \frac{A}{2h + b}$ ,  $\varepsilon$  [−] é um termo que representa a porosidade do leito do canal,  $v$  [m/s] é a velocidade de escoamento de água definida por  $v = \frac{Q}{A}$ , utilizada para determinação do

fluxo de sedimentos por unidade de largura,  $q_b(v)$  [ $\text{m}^2/\text{s}$ ], a qual modelaremos pelo fluxo de Grass, dado por

$$q_b(v) = A_g(v)|v^{m-1}|v \tag{3}$$

onde,  $m$  [-] é uma constante arbitrária maior que 1 e  $A_g(v)$  [ $\text{m}^{(2-m)}\text{s}^{(m-1)}$ ] é uma função que representa a intensidade de erosão do leito do canal, que é mais alta para materiais mais facilmente erodíveis, a qual tomaremos como constante neste trabalho.

### 3 Método Ying-Khan-Wang para Saint-Venant-Exner

Para resolver o sistema de Saint-Venant-Exner utilizamos uma estratégia desacoplada, pois, por mais que seja composto por leis de conservação, o sistema não pode ser escrito em uma forma conservativa [4]. Assim, resolvemos as três equações separadamente, em um método de três passos. Os dois primeiros passos deste método são os passos do método Ying-Khan-Wang [5] (YKW) que resolve a hidrodinâmica do problema, já o terceiro passo computa a evolução do transporte de sedimentos com base nos valores calculados nos passos anteriores. Conferindo assim a característica de resolução desacoplada, uma vez que os fenômenos de hidrodinâmica e de transporte de sedimentos são computados separadamente.

#### 3.1 Resolução da hidrodinâmica pelo método YKW

O método YKW é um método de volumes finitos, conservativo e de características Upwind para as equações de Saint-Venant (1a)-(1b). Assim, considere que o domínio  $\Omega$  é discretizado em uma malha uniforme com  $n_x$  células, de forma que  $x_{i+1/2}$ ,  $i = 0, \dots, n_x$  são os nós, que definem as células  $c_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$   $i = 1, \dots, n_x$ , com centróides  $x_i$ , onde são calculadas as médias das quantidades conservadas na célula.

Como um método conservativo, a sua evolução no tempo é dada por

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \mathbf{f}_{i-\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} \right] + \Delta t \mathbf{s}_i, \tag{4}$$

onde  $\Delta t$  é o passo no tempo, calculado a cada iteração de forma que o método seja estável,  $\Delta x$  é o tamanho das células da malha uniforme,  $\mathbf{u}_i^n$  é a solução numérica de determinada quantidade conservativa  $u$  no tempo  $t^n$  na posição  $x_i$ ,  $\mathbf{s}_i$  é o termo de fonte calculado neste ponto e  $\mathbf{f}_{i+1/2}$  é o fluxo numérico, que aproxima o fluxo da lei de conservação no nó  $x_{i+1/2}$ , é neste termo também que se encontra a característica Upwind do método, indicando que este fluxo numérico é calculado utilizando apenas as informações à montante, isto é, das células de onde a água flui para a célula  $c_i$ .

Considerando apenas as equações de Saint-Venant (1a)-(1b), definimos o fluxo numérico por

$$\mathbf{f}_{i+1/2} = \left[ \begin{array}{c} Q_{i+k}^n \\ \frac{(Q_{i+k}^n)^2}{A_{i+k}^n} \end{array} \right], \tag{5}$$

e o termo de fonte por

$$\mathbf{s}_i = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -gA_i^{n+1} \left[ w_{\text{down}} \left( \frac{\Delta z}{\Delta x} \right)_{\text{down}} + w_{\text{up}} \left( \frac{\Delta z}{\Delta x} \right)_{\text{up}} \right] - g \frac{n_M^2 Q_i^n |Q_i^n|}{A_i^n (R_i^n)^{4/3}} \end{array} \right], \tag{6}$$

onde  $k$ , que rege a característica Upwind do método, é da forma

$$k = \begin{cases} 0, & \text{se } Q_i > 0, Q_{i+1} > 0 \\ 1, & \text{se } Q_i < 0, Q_{i+1} < 0 \\ 1/2, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (7)$$

sendo que  $k = 1/2$  implica em uma média dos valores com  $k = 0$  e  $k = 1$ .

Além disso, o termo entre colchetes é uma aproximação de  $\frac{\partial z}{\partial x}$  por combinação das aproximações Downwind e Upwind que são ponderadas pelos pesos  $w_{\text{down}}$  e  $w_{\text{up}}$  dados por

$$w_{\text{down}} = \frac{1 - \sqrt{C_r^{\text{down}}}}{1 - \sqrt{C_r^{\text{down}}} + \sqrt{C_r^{\text{up}}}} \quad \text{e} \quad w_{\text{up}} = \frac{\sqrt{C_r^{\text{up}}}}{1 - \sqrt{C_r^{\text{down}}} + \sqrt{C_r^{\text{up}}}}, \quad (8)$$

sendo que  $C_r^{\text{down}}$  e  $C_r^{\text{up}}$  são da forma

$$C_r^{\text{down}} = \frac{\Delta t}{x_{i+1-k} - x_{i-k}} \frac{V_{i+1-k} - V_{i-k}}{2} \quad \text{e} \quad C_r^{\text{up}} = \frac{\Delta t}{x_{i+k} - x_{i-1+k}} \frac{V_{i+k} - V_{i-1+k}}{2} \quad (9)$$

com a velocidade  $V_i$  dada por  $V_i = \frac{|Q_i^n|}{A_i^n}$ .

Com estas definições apresentamos os passos do método YKW, que são os dois primeiros passos do método para o sistema Saint-Venant-Exner. Considere conhecidas as quantidades conservadas  $A$ ,  $Q$  e  $z_b$  em determinado instante  $t^n$  e certo passo no tempo  $\Delta t$  de forma que o método se mantenha estável, obtemos, no primeiro passo, os valores de  $A$  para as células do domínio em  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  de acordo com a evolução dada por

$$A_i^{n+1} = A_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (Q_{i+k}^n - Q_{i-k}^n), \quad (10)$$

e, no segundo passo, obtemos os valores de  $Q$  em  $t^{n+1}$  por

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left( \frac{(Q_{i+k}^n)^2}{A_{i+k}^n} - \frac{(Q_{i-k}^n)^2}{A_{i-k}^n} \right) + \Delta t \left( -g A_i^{n+1} \left[ w_{\text{down}} \left( \frac{\Delta z}{\Delta x} \right)_{\text{down}} + w_{\text{up}} \left( \frac{\Delta z}{\Delta x} \right)_{\text{up}} \right] - g \frac{n_M^2 Q_i^n |Q_i^n|}{A_i^n (R_i^n)^{4/3}} \right). \quad (11)$$

### 3.2 Acoplamento da equação de Exner

Deste modo, com  $A$  e  $Q$  conhecidos em  $t^{n+1}$ , podemos calcular a velocidade  $v$ , por conseguinte calculamos o fluxo de sedimentos (3), e então resolver a equação de Exner neste passo no tempo se torna resolver

$$z_b^{n+1} = z_b^n - \varepsilon \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial q_b}{\partial x} dt, \quad (12)$$

a qual, com a aproximação da integral para frente no tempo e aproximando a derivada de forma Upwind obtemos a evolução da cota do leito  $z_b$  e terceiro passo do método, que no caso em que  $q_b > 0$  é dado por

$$z_b(x_i, t^{n+1}) = z_b(x_i, t^n) - \varepsilon \Delta t \frac{q_b(x_i, t^{n+1}) - q_b(x_{i-1}, t^{n+1})}{\Delta x}. \quad (13)$$

### 3.3 Método de três passos

Deste modo, o esquema abaixo ilustra como o método YKW para Saint-Venant-Exner evolui as suas quantidades conservadas do tempo  $t^n$  para o tempo  $t^{n+1}$ ,

$$\begin{bmatrix} A^n \\ Q^n \\ z_b^n \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{fixo}]{(10)} \begin{bmatrix} A^{n+1} \\ Q^n \\ z_b^n \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{fixo}]{(11)} \begin{bmatrix} A^{n+1} \\ Q^{n+1} \\ z_b^n \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{fixo}]{(13)} \begin{bmatrix} A^{n+1} \\ Q^{n+1} \\ z_b^{n+1} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

O método deve obedecer a física do problema, assim, as condições de contorno, que são calculadas por meio de células fantasmas, dependem do regime de fluxo calculado pelo número de Froude  $Fr = \frac{|v|}{\sqrt{gh}}$ , definindo quantas informações devemos prescrever ao contorno e quantas devem ser livres para cálculo do próprio método, nestes casos, as variáveis livres são estipuladas por extrapolação linear. Além disso, foi implementado tratamento de leito seco, para que não houvesse instabilidades no caso de profundidades de águas quase nulas, e, nestas, a velocidade foi regularizada.

## 4 Simulação de fluxo estável sobre ressalto

Considere um canal de seção retangular de 25 m de comprimento e 1 m de largura, discretizado em uma malha uniforme de espaçamento  $\Delta x = 0.1$  m, com cota de fundo no instante inicial dada por

$$z_b(x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 8 \text{ e } x > 12 \\ 0.2 - 0.005(x - 10)^2, & \text{se } 8 \leq x \leq 12 \end{cases}. \quad (15)$$

Seja a altura de água  $z$  igual a 0.33 m e a vazão  $0.18 \text{ m}^3/\text{s}$  em todo o domínio no instante inicial. Submetemos o fluido a uma altura de  $z = 0.33$  m no bordo à jusante e a uma vazão de  $Q = 0.18 \text{ m}^3/\text{s}$  no bordo à montante como condições de contorno.

Considere também que o solo é rugoso, cujo atrito é definido por  $n_M = 0.01 \text{ s}/\text{m}^{1/3}$ , sua porosidade é dada por  $\varepsilon = 10^{-2}$  em todo o domínio, e o fluxo de sedimentos (3) com  $m = 1.5$  e  $A_g = 1 \text{ m}^{1/2}\text{s}^{1/2}$ , isto é,

$$q_b = v|\sqrt{v}|. \quad (16)$$

Nestas condições simulamos a dinâmica, cujos perfis da altura d'água  $z$  e da cota do leito  $z_b$  apresentamos na Figura 2 para os instantes de tempo inicial  $t = 0$  s e final  $t = 200$  s.

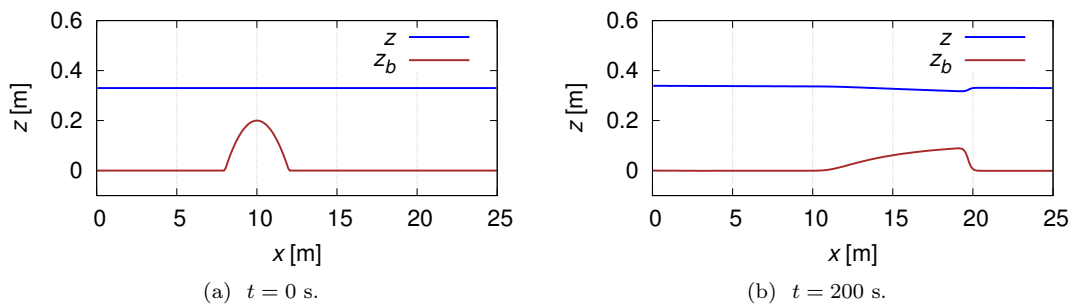


Figura 2: Perfis da altura d'água  $z$  e da cota do leito  $z_b$  da simulação no canal com ressalto. Fonte: dos autores.

## 5 Simulação em canal de largura variável

Considere um canal retangular de 25 m discretizado em uma malha uniforme de espaçamento  $\Delta x = 0.1$  m cuja largura é dada por

$$b(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ 1.5 - x/10 & \text{se } 5 < x < 10 \\ 0.5 & \text{se } 10 \leq x \leq 15 \\ x/10 - 1 & \text{se } 15 < x < 20 \\ 1 & \text{se } 20 \leq x \leq 25 \end{cases} . \quad (17)$$

Seja o atrito entre fluido e solo definido por  $n_M = 0.01$  s/m<sup>1/3</sup>, a porosidade do leito dada por  $\varepsilon = 10^{-1}$  e  $A_g = 1$  m<sup>1/2</sup>s<sup>1/2</sup> com  $m = 1.5$ , escolhidos a fim de uma maior facilidade no transporte de sedimentos, com o qual o estado de equilíbrio deve ser obtido com um tempo menor de simulação. Considere que, no instante inicial, a cota do leito é constante  $z_b = 0$ , altura de água é  $z = 0.33$  m e a vazão é  $Q = 0.18$  m<sup>3</sup>/s em todo o domínio.

Os perfis da altura d'água  $z$  e da cota do leito  $z_b$  da simulação no canal de largura variável são dados pela Figura 3 nos tempos 60 s e 600 s, sendo que no instante  $t = 600$  s a solução está em *steady-state*.

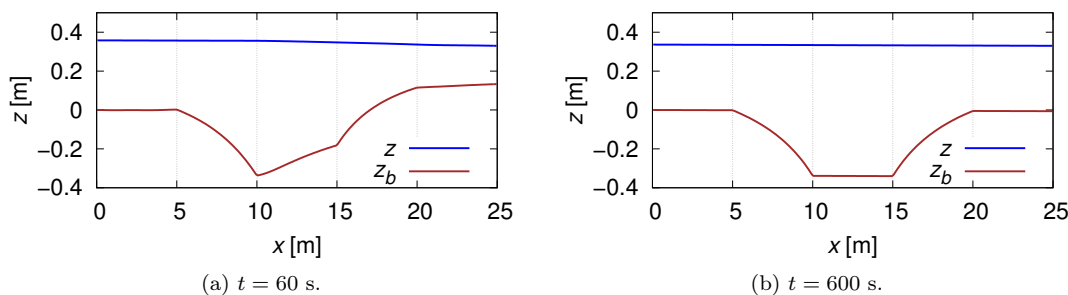


Figura 3: Perfis da altura d'água  $z$  e da cota do leito  $z_b$  em diferentes instantes de tempo. Fonte: dos autores.

Estando no estado de equilíbrio, a vazão deve ser constante, como é apresentado pela Figura 4a. Apresentamos também os gráficos no estado de equilíbrio da velocidade média do fluxo  $v$ , da profundidade de água  $h$  e da área molhada  $A$  nas Figuras 4b, 4c e 4d, respectivamente.

## 6 Considerações Finais

As simulações numéricas apresentadas neste trabalho indicam que o método YKW para o sistema Saint-Venant-Exner é robusto e bem balanceado, inclusive para casos de água em constante movimento, tendo se mostrado eficaz na resolução de problemas de hidrodinâmica com transporte de sedimentos. A metodologia numérica foi capaz de simular com precisão e robustez um caso de transporte com erosão do leito em que o sistema atinge o estado de equilíbrio, com a vazão  $Q$  e a área molhada  $A$  constantes no tempo, diferentemente dos casos que excluem transporte de sedimentos, nos quais o estado de equilíbrio tem apenas a vazão constante.

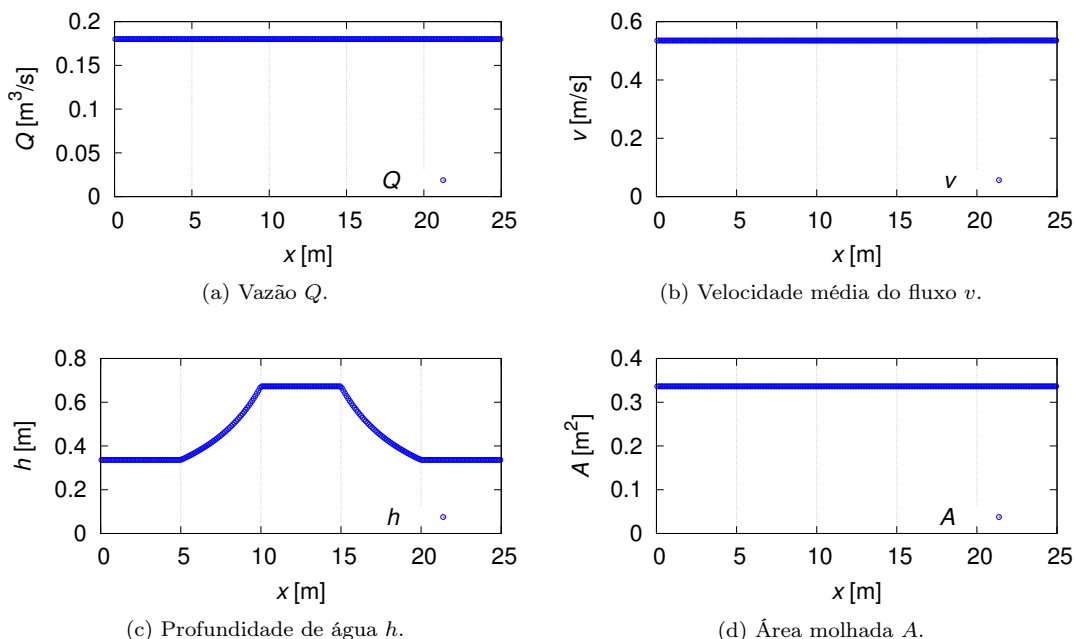


Figura 4: Perfis no estado de equilíbrio no canal com largura variável da vazão  $Q$ , da velocidade média do fluxo  $v$ , da profundidade de água  $h$  e da área molhada  $A$ . Fonte: dos autores.

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Processos N<sup>o</sup> 2022/13007-2 e 2024/06306-9.

## Referências

- [1] E. G. Birgin, M. R. Correa, V. A. González-López, J. M. Martínez e D. S. Rodrigues. “Randomly supported variation of deterministic models and its application to one-dimensional shallow water flows”. Em: **Journal of Hydraulic Engineering** (2024). DOI: 10.1061/jhend8/hyeng-13748.
- [2] F. M. Exner. **Zur Physik der Dünen**. Hölder, 1920.
- [3] A. J. C. B. Saint-Venant. “Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l’introduction des marées dans leur lit”. Em: **Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences** 73 (1871), pp. 147–154. ISSN: 0001-4036.
- [4] A. Siviglia, D. Vanzo e E. F. Toro. “A splitting scheme for the coupled Saint-Venant-Exner model”. Em: **Advances in Water Resources** 159 (jan. de 2022), p. 104062. DOI: 10.1016/j.advwatres.2021.104062.
- [5] X. Ying, A. A. Khan e S. S. Y. Wang. “Upwind Conservative Scheme for the Saint Venant Equations”. Em: **Journal of Hydraulic Engineering** 130 (out. de 2004). DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9429(2004)130:10(977).