Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Caracterização de Curvatura em Hipersuperfícies de $\mathbb{R}^n$ através de Espinores Operatoriais

Lucas de Souza Almeida[1]
UNICAMP, Campinas, SP
Rafael de Freitas Leão[2]
Sem Filiação, Campinas, SP
Samuel Augusto Wainer[3]
ITA, São José dos Campos, SP

Resumo. No artigo seminal de 1998, Thomas Friedrich estabeleceu a primeira relação entre imersões e a equação de Dirac no caso de dimensão 2. Desde então, vários autores contribuíram para este tópico, por exemplo, obtendo a representação eespinorial de variedades de *Spin* com dimensões mais altas e também apresentando uma generalização do mapa de representação de Weierstrass. Na literatura, espinores são caracterizados por múltiplas abordagens. A perspectiva clássica os considera como elementos do espaço que carregam a representação spin do grupo de rotação. Uma outra visão, conhecida como definição algébrica, identifica espinores como elementos pertencentes a um ideal minimal à esquerda dentro de uma álgebra de Clifford. Adicionalmente, uma perspectiva alternativa, denominada spinor operatorial, define os espinores como elementos situados na subálgebra par de uma dada álgebra de Clifford. Uma das vantagens de trabalhar com espinores operatoriais é que geralmente possuem um inverso algébrico, uma característica que os espinores clássicos não possuem. O objetivo deste estudo é apresentar a relação entre a geometria de uma hipersuperfície dada por sua curvatura média e o operador de Dirac definido através de espinores operatoriais.

Palavras-chave. Imersões Isométricas, Espinores Operatoriais, Curvatura Média

1 Introdução

O mapa de Weierstrass é um método clássico para utilizar funções complexas na construção de superfícies mínimas no espaço Euclidiano tridimensional. Thomas Friedrich demonstrou [4] que o mapa de Weierstrass está relacionado aos espinores e à equação de Dirac. Ele mostrou que, dada uma imersão $M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, existe um campo espinorial específico φ com norma constante que satisfaz a equação de Dirac homogênea $D(\varphi) = H\varphi$, onde H é a curvatura média da variedade M. Por sua vez, uma solução φ da equação de Dirac com norma constante resulta em uma imersão isométrica de M em $\mathbb{R}^3$.

Desde a publicação dessa notável equivalência, vários autores [1–3, 5, 6, 8, 9, 12] contribuíram para esse tópico, mostrando como a equação de Dirac, espinores, equações de Gauss-Codazzi e imersões isométricas estão relacionadas.

Na perspectiva clássica [7] os espinores são considerados como elementos do espaço que carrega a representação spin do grupo de rotação. Outra visão, conhecida como definição algébrica, identifica

[1] l229349@dac.unicamp.br
[2] leao79@gmail.com
[3] wainer@ita.br

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0357

espinores como elementos pertencentes a um ideal minimal à esquerda dentro de uma álgebra de Clifford. Além disso, uma abordagem alternativa, chamada de spinor operatorial, conceitua espinores como operadores dentro da subálgebra par de uma álgebra de Clifford. Uma das vantagens de trabalhar com espinores operatorias é que eles (em geral) têm um inverso algébrico, enquanto os espinores clássicos não têm. Este conceito de espinores operatorias é particularmente adequado para o estudo de superfícies, permitindo-nos obter certos resultados, como uma equação semelhante à de Dirac satisfeita por um campo spinorial, de maneira muito mais simples.

Recentemente, em 2018, Vaz [12] apresentou a representação de superfícies em $\mathbb{R}^3$ usando espinores operatorias. Vaz demonstrou que um spinor operatorial representando uma superfície satisfaz um par de equações semelhantes à de Dirac, e estabeleceu ainda que esta representação de spinor operatorial constitui uma generalização da representação de Weierstrass de superfícies mínimas.

O objetivo deste estudo é apresentar a relação entre a geometria da superfície dada por sua curvatura média e o operador de Dirac definido através de espinores operatorias, mais especificamente, desejamos demonstrar a seguinte proposição.

Proposição. *Seja M uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^n$ orientada e ψ um spinor em $\mathbb{C}l_n^0$ tal que $E_i = \psi e_i \psi^{-1}$ com $1 \leq i \leq n$ seja o referencial de Darboux. Então,*

$$H = \frac{2}{\rho(n-1)} \langle D^R \psi e_n \psi^{-1} \rangle_0, \tag{1}$$

onde $\rho = \psi\tilde{\psi} = |E_i|$.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: na Seção 2, fornecemos os preliminares algébricos necessários para compreender o contexto e o resultado. Em seguida, na Seção 3, discutimos o operador de forma e sua relação com os espinores operatoriais, culminando na investigação da relação entre a geometria da superfície, expressa por sua curvatura média, e o operador de Dirac. Finalmente, na Seção 4, apresentamos nossas considerações finais.

2 Preliminares Algébricos

A álgebra de Clifford Cl_n é uma álgebra associativa com unidade associada a $\mathbb{R}^n$ e seu produto interno padrão, de modo que, para todos $u, v \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$vu + uv = -2\langle v, u \rangle, \tag{2}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa o produto interno padrão em $\mathbb{R}^n$. Uma propriedade importante é que se v e u são vetores ortogonais, então pelo produto em (2), temos $vu = -uv$.

A classificação das álgebras de Clifford pode ser encontrada em [7]. Com isso, é possível saber explicitamente quem é Cl_n, porém é muito comum utilizar a álgebra de Clifford complexa, já que possui uma classificação mais simples, pois $\mathbb{C}l_n$ será $\mathbb{C}(2^{\frac{n}{2}})$ se n é par ou $\mathbb{C}(2^{\frac{n-1}{2}}) \oplus \mathbb{C}(2^{\frac{n-1}{2}})$ se n é ímpar e, além disso, $Cl_n \subset \mathbb{C}l_n := Cl_n \otimes \mathbb{C}$.

Existe uma relação entre esta álgebra e a álgebra exterior, $\Lambda(\mathbb{R}^n)$, dada pelo isomorfismo de espaços vetoriais $Cl_n \cong \Lambda(\mathbb{R}^n)$, e isso nos auxilia na realização de alguns cálculos. Este isomorfismo implica que

$$Cl_n = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda_p(\mathbb{R}^n), \tag{3}$$

onde $\Lambda_p(\mathbb{R}^n)$ é a p-ésima potência exterior de $\mathbb{R}^n$. Os operadores de projeção são denotados por

$$\langle\ \rangle_p : Cl_n \to \Lambda_p(\mathbb{R}^n). \tag{4}$$

Além disso, temos a seguinte propriedade: dado $\varphi, \psi \in Cl_n$, segue que $\langle \varphi\psi \rangle_0 = \langle \psi\varphi \rangle_0 \in \Lambda_0(\mathbb{R}^4)$. Essa abordagem pode ser encontrada em [13].

Na álgebra de Clifford, existem alguns automorfismos fundamentais, como o operador de reversão (transposição) denotado pelo til e a conjugação (involução) denotada pelo chapéu.

$$\widetilde{\varphi\psi} = \tilde{\psi}\tilde{\varphi}. \tag{5}$$

No caso em que $\varphi = v$ e $\psi = u$, temos $\widetilde{vu} = \tilde{u}\tilde{v} = uv$. A conjugação é um pouco mais específica, pois decompõe a álgebra de Clifford em dois subconjuntos:

$$Cl_n^0 := \{\varphi \in Cl_n : \hat{\varphi} = \varphi\} \text{ e } Cl_n^1 :=\{\varphi \in Cl_n : \hat{\varphi} = -\varphi\}. \tag{6}$$

Onde Cl_n^0 é uma subálgebra de Cl_n enquanto Cl_n^1 não é, chamamos Cl_n^0 de uma subálgebra par. Observe que ao decompor Cl_n em (3), temos que

$$Cl_n^0 = \bigoplus_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \Lambda_{2p}(\mathbb{R}^n) \tag{7}$$

onde $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ é a função maior inteiro menor do que $\frac{n}{2}$.

Agora podemos definir um subgrupo multiplicativo de Cl_n^0, chamado Spin(n), que é bem conhecido na matemática por ser o recobrimento universal de SO(n) para $n \leq 3$. Este recobrimento é explicitamente definido da seguinte forma: para todo $A \in SO(n)$, existe um par de espinores $\pm\psi \in \text{Spin(n)}$ tal que $\psi v \psi^{-1} = A(v)$ para cada $v \in \mathbb{R}^n$.

Uma característica importante da álgebra de Clifford é que podemos calcular a norma de seus elementos não nulos. A norma de um elemento $\psi \in Cl_n^0$ é dada por $\psi\hat{\tilde{\psi}}$, e de acordo com [7], sabemos que $\psi\hat{\tilde{\psi}} \in \mathbb{R}^*$. Portanto, se $\psi \in Cl_n^0$, então sua norma é $\psi\widetilde{\psi}$, e podemos definir o grupo Spin(n) por

$$Spin(n) := \{\psi \in Cl_n^0 : \ \psi\widetilde{\psi} = 1\}. \tag{8}$$

Observação 2.1. *Note que se $\psi \in Spin(n)$, então para cada número real $c > 0$ e $c \neq 1$, temos que $c\psi \in Cl_n^0$.*

Um espinor operatorial φ é um elemento da subálgebra par Cl_n^0. Pela decomposição em (7), podemos obtê-lo explicitamente, uma vez que

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{i_1 < \cdots < i_{2k}} \varphi_{i_1 \cdots i_{2k}} e_{i_1 \cdots i_{2k}}, \tag{9}$$

onde $0 \leq k \leq n$ e $e_{i_1 \cdots i_k} = e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}}$.

Exemplo 1. *Para n=4 estamos sobre a álgebra Cl_4 e sua subalgebra par dada por Cl_4^0, então um espinor em Cl_4^0 é escrito como*

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{12}e_{12} + \varphi_{13}e_{13} + \varphi_{23}e_{23} + \varphi_{14}e_{14} + \varphi_{24}e_4 + \varphi_{34}e_{34} + \varphi_{1234}e_{1234}, \tag{10}$$

Se, dado que $|\varphi| = \varphi\tilde{\varphi} \neq 0$, então o operador inverso do espinor, denotado por φ^{-1}, surge como uma ferramenta útil na obtenção do resultado da próxima seção.

3 Operador Forma e Espinores Operatoriais

Nesta seção, estamos sempre considerando uma hipersuperfície parametrizada por coordenadas isotérmicas [4]. Embora não mencionemos esse fato repetidamente ao longo do texto, ressaltaremos quando necessário.

Seja $\mathbf{x} : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície orientada e parametrizada por coordenadas isotermicas, ou seja,

$$E_j = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_j} = e^{\alpha}\mathbf{f}_i, \quad 1 \leq j \leq n-1, \tag{11}$$

onde $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n-1}, \mathbf{f}_n\}$ é um referencial ortonormal de $\mathbb{R}^n$ gerado a partir da rotação do referencial coordenado $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Segue que

$$\mathbf{f}_j = \phi e_j \tilde{\phi}, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{12}$$

com $\phi \in Spin(n)$, lembrando que $e_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Assim, podemos expressar os vetores em (11) como

$$E_j = \psi e_j \tilde{\psi}, \tag{13}$$

onde $\psi = \sqrt{\rho}\phi \in \mathbb{C}l_n^0$, com $\rho = e^{\alpha}$, e $E_n = \psi e_n \tilde{\psi}$ é ortogonal a M. Note que $N = \dfrac{E_n}{|E_n|} = \rho^{-1}E_n$ e $\{E_1, \ldots, E_{n-1}, N\}$ forma o referencial de Darboux.

Usando a definição dada por [12] dos operadores D^L e D^R mas para uma hipersuperfície de dimensão n-1, temos

$$D^L_{(x_1,\ldots,x_{n-1})}\psi = \sum_{j=1}^{n-1} e_j \psi_{x_j} \;\text{ e }\; D^R_{(x_1,\ldots,x_{n-1})}\psi = \sum_{j=1}^{n-1} \psi_{x_j} e_j. \tag{14}$$

onde $\psi_{x_j} = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}$ e o produto entre e_j e ψ_{x_j} é o produto de Clifford.

Observa-se que

$$\begin{aligned} \widetilde{D^R}\psi &= \widetilde{\sum_{j=1}^{n-1} \psi_{x_j} e_j} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \widetilde{\psi_{x_j} e_j} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} e_j \widetilde{\psi_{x_j}} = D^L \tilde{\psi}. \end{aligned} \tag{15}$$

Definição 3.1. *Seja M uma $(n-1)$-variedade imersa em $\mathbb{R}^n$. Definimos o operador forma como o mapa $S : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ tal que $S(E_k) = -\nabla_{E_k} N$, onde ∇ é a conexão de $\mathbb{R}^n$ e $N = \dfrac{E_n}{\|E_n\|} = \rho^{-1}E_n$, ou seja, o próprio vetor direcional.*

Definição 3.2. *A curvatura média de M, denotada por H, é definida como*

$$H = \frac{1}{n-1} Tr(S). \tag{16}$$

[4]Existem algumas obstruções para que uma hipersuperfície seja parametrizada por coordenadas isotérmicas [10].

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0357

Essa definição e outros conceitos relacionados a hipersuperfícies podem ser encontrado em [11].

A partir da definição de S é possível conseguir uma relação da curvatura média de uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^4$, estendendo o caso feito por [12] em $\mathbb{R}^3$, na verdade, veremos que isso vale para uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^n$. Então, inicialmente, obtemos

$$\mathrm{Tr}(S) = -\sum_{k=1}^{3}\langle \frac{\partial N}{\partial x_k}, E_k\rangle = \sum_{k=1}^{3}\langle N, \frac{\partial E_k}{\partial x_k}\rangle. \tag{17}$$

Sabemos que $\langle N, \frac{\partial E_k}{\partial x_k}\rangle \in \Lambda^0(\mathbb{R}^4) \subset Cl_4^0$, e se $A, B \in \mathbb{C}l_4$, então $\langle AB\rangle_0 = \langle BA\rangle_0$.

Para determinar a curvatura média em termos de espinores, calculamos cada produto interno $\langle N, \frac{\partial E_k}{\partial x_k}\rangle$ em termos de espinores.

$$\langle N, \frac{\partial E_k}{\partial x_k}\rangle = \rho^{-1}\langle \tilde{\psi}\psi_{x_k} e_k e_4\rangle_0 + \rho^{-1}\langle \tilde{\psi}_{x_k}\psi e_4 e_k\rangle_0. \tag{18}$$

Agora, observe que $\psi\tilde{\psi} = \rho = \tilde{\psi}\psi$. Assim, produzimos duas equações:

$$\begin{cases} \psi_{x_k}\tilde{\psi} + \psi\tilde{\psi}_{x_k} = \dfrac{\partial \rho}{\partial x_k}, \\ \tilde{\psi}_{x_k}\psi + \tilde{\psi}\psi_{x_k} = \dfrac{\partial \rho}{\partial x_k}. \end{cases} \tag{19}$$

Então,

$$\begin{cases} \psi_{x_k}\tilde{\psi} = \dfrac{\partial \rho}{\partial x_k} - \psi\tilde{\psi}_{x_k}, \\ \tilde{\psi}_{x_k}\psi = \dfrac{\partial \rho}{\partial x_k} - \tilde{\psi}\psi_{x_k}. \end{cases} \tag{20}$$

Substituindo as equações (20) em (18), obtemos

$$\langle N, \frac{\partial E_k}{\partial x_k}\rangle = 2\rho^{-1}\langle \tilde{\psi}\psi_{x_k} e_k e_4\rangle_0. \tag{21}$$

Assim,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\langle N, \frac{\partial E_k}{\partial x_k}\rangle \\ &= \rho^{-1}\frac{2}{3}\langle \tilde{\psi}\psi_{x_1} e_1 e_4 + \tilde{\psi}\psi_{x_2} e_2 e_4 + \tilde{\psi}\psi_{x_3} e_3 e_4\rangle_0 \\ &= \rho^{-1}\frac{2}{3}\langle \tilde{\psi} D^R \psi e_4\rangle_0 \\ &= \rho^{-1}\frac{2}{3}\langle D^R \psi e_4 \tilde{\psi}\rangle_0. \end{aligned} \tag{22}$$

Note que a expressão em (22) vale para $n \leq 5$, mas para $n > 5$, temos $E_k = \psi e_k \psi^{-1}$, ou seja, substituímos a transposta $\tilde{\psi}$ por ψ^{-1} [7].

Para prosseguir com o resultado, observe que $\psi\psi^{-1} = 1$, então

$$\begin{aligned} (\psi\psi^{-1})_{x_k} &= 0 \\ \psi_{x_k}\psi^{-1} + \psi(\psi^{-1})_{x_k} &= 0 \\ \psi(\psi^{-1})_{x_k} &= -\psi_{x_k}\psi^{-1} \\ (\psi^{-1})_{x_k} &= -\psi^{-1}\psi_{x_k}\psi^{-1}. \end{aligned} \tag{23}$$

Uma vez que estamos considerando $n > 5$ e temos a equação (23), podemos resolver uma equação similiar a (18) e obter

$$\langle N, \frac{\partial E_k}{\partial x_k} \rangle = 2\rho^{-1} \langle \psi^{-1} \psi_{x_k} e_k e_n \rangle_0. \tag{24}$$

Agora, podemos enunciar o resultado principal deste trabalho.

Proposição 3.1. *Seja M uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^n$ orientada e parametrizada por coordenadas isotérmcias. Considere ψ um spinor em $\mathbb{C}l_n^0$ tal que $E_i = \psi e_i \psi^{-1}$ com $1 \leq i \leq n$ seja o referencial de Darboux. Então,*

$$H = \frac{2}{\rho(n-1)} \langle D^R \psi e_n \psi^{-1} \rangle_0, \tag{25}$$

onde $\rho = \psi \tilde{\psi} = |E_i|$.

Demonstração. Com todas as relações estabelecidas anteriormente, temos que

$$\begin{aligned} H &= \rho^{-1} \frac{2}{n-1} \langle \psi^{-1} D^R \psi e_n \rangle_0 \\ &= \rho^{-1} \frac{2}{n-1} \langle D^R \psi e_n \psi^{-1} \rangle_0. \end{aligned} \tag{26}$$

□

Observação 3.1. *Em [12], é demonstrado que, ao manipular a expressão $A = D^R \psi e_3 \tilde{\psi}$, em uma superfície parametrizada por coordenadas isotérmicas, existe um espinor operatorial que satisfaz uma equação do tipo Dirac, representada por:*

$$D^R \psi = pH\psi e_3. \tag{27}$$

Analisando esse resultado com o obtido em (25), podemos afirmar que o termo zero, $\langle D^R \psi e_n \psi^{-1} \rangle_0$, para hipersuperfícies sempre dependerá da curvatura média H.

4 Considerações Finais

Na literatura, já se demonstrou que a geometria spin oferece uma alternativa eficaz para obter resultados clássicos da geometria diferencial, especialmente em relação às imersões isométricas. Essa abordagem, mais algébrica, torna-a mais acessível computacionalmente. Nosso trabalho mostrou que é viável expressar a curvatura média de qualquer hipersuperfície de dimensão finita em termos de espinores operatoriais. Essa perspectiva não só simplifica a compreensão e a manipulação de conceitos geométricos complexos, mas também abre novas possibilidades para estender e generalizar resultados conhecidos. Assim, contribuímos para o avanço da geometria spin e sua aplicação em diversos campos, como física matemática, geometria diferencial e teoria das superfícies.

Referências

[1] P. Bayard. "On the spinorial representation of spacelike surfaces into 4-dimensional Minkowski space". Em: **Journal of Geometry and Physics** 74 (2013), pp. 289–313.

[2] P. Bayard, M. Lawn e J. Roth. "Spinorial representation of submanifolds in Riemannian space forms". Em: **Pacific Journal of Mathematics** 291.1 (2017), pp. 51–80.

[3] P. Bayard, M. Lawn e J. Roth. “Spinorial representation of surfaces into 4-dimensional space forms”. Em: **Annals of Global Analysis and Geometry** 44 (2013), pp. 433–453.

[4] T. Friedrich. “On the spinor representation of surfaces in Euclidean 3-space”. Em: **Journal of Geometry and Physics** 28.1-2 (1998), pp. 143–157.

[5] M. Lawn. “Immersions of Lorentzian surfaces in R2,1”. Em: **Journal of Geometry and Physics** 58.6 (2008), pp. 683–700.

[6] M. Lawn e J. Roth. “Spinorial characterizations of surfaces into 3-dimensional pseudo-Riemannian space forms”. Em: **Mathematical Physics, Analysis and Geometry** 14 (2011), pp. 185–195.

[7] H. B. Lawson e M. Michelsohn. **Spin Geometry (PMS-38), Volume 38**. Vol. 20. Princeton university press, 2016.

[8] R. F. Leão e S. A. Wainer. “Immersion in Rn by Complex Spinors”. Em: **Advances in Applied Clifford Algebras** 28.2 (2018), p. 44.

[9] B. Morel. “Surfaces in S3 and H3 via spinors”. Em: **Séminaire de théorie spectrale et géométrie** 23 (2005), pp. 131–144.

[10] S. Nishikawa e Y. Maeda. “Conformally flat hypersurfaces in a conformally flat Riemannian manifold”. Em: **Tohoku Mathematical Journal, Second Series** 26.1 (1974), pp. 159–168.

[11] B. O’Neill. **Elementary differential geometry**. Elsevier, 2006.

[12] J. Vaz. “Representation of surfaces using spinor operators”. Em: **Journal of Mathematical Physics** 60.2 (2019).

[13] J. Vaz e R. da Rocha. **An introduction to Clifford algebras and spinors**. Oxford University Press, 2016.

