Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Potencialidades da Torre de Hanói no Ensino

Bianca A. Fonseca [1]
Colégio Ética, São Carlos, SP
José A. Salvador[2]
DM/UFSCar, São Carlos, SP

Resumo. Neste trabalho vamos mostrar algumas potencialidades do desafio da Torre de Hanói no processo de ensino e aprendizagem cooperativo de conceitos matemáticos. Nos materiais didáticos como a Torre de Hanói, propomos que a investigação comece com a lenda histórica, o processo de construção geométrica sustentável (escolha de material, medidas, distâncias, áreas e volumes das peças), as regras dos movimentos dos anéis (discos) e tentativas de resolver o desafio em si. Para isso, é fundamental analisar todos os movimentos possíveis e encontrar o número mínimo de movimentos necessários para resolver o famoso quebra-cabeça, descobrindo padrões e relações matemáticas. As ideias e estratégias para resolver o problema de forma eficiente e construir a fórmula de recorrência que produz o número mínimo de movimentos dos $n, n \in \mathbb{N}$ anéis, devem ser compartilhados nas equipes de trabalho. Propomos ainda uma representação geométrica das torres como vértices e os deslocamentos dos anéis como arestas de um Grafo e a obtenção de uma disposição fractal tipo Triângulo de Sierpinski, dando uma visão mais geral das possibilidades de uso da Torre de Hanói no ensino básico ou nas licenciaturas.

Palavras-chave. Torre de Hanói, História, Construção, Movimentos das Peças, Triângulo de Sierpinsk. Grafos

1 Introdução

Os jogos ou desafios surgiram há milhares de anos, provavelmente quando membros das comunidades tribais se uniam para celebrar a vida por meio de jogos baseados em atividades com mais oportunidade de diversão e com a preocupação de evitar violações físicas e psicológicas [1, 4].

Muitos educadores vem defendendo a exploração de desafios no processo de ensino da matemática. Piaget [5], por exemplo, apontou desafio como uma atividade espontânea, oposta ao trabalho. É uma atividade que dá prazer. Especialmente quando os estudantes estão na fase das operações concretas (de 7 aos 11 anos) em que a criança aprende as regras e a jogar em grupo. Esta é a fase dos jogos com regras.

Outros pesquisadores, como Vygotsky [6], perceberam que os desafios têm um papel expressivo no desenvolvimento de certas habilidades cognitivas.

Huizinga enfatizou a relação do brincar com a cultura "Chegamos assim à primeira das características fundamentais do jogo: o fato de ser livre, de ser ele próprio a liberdade"[3]. Os desafios apresentados aos estudantes supõe um "fazer sem obrigação externa e imposta", embora demande exigências, regras e controle. A Educação Matemática vem contribuindo para a necessidade de repensarmos as condições de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos comumente abordados, de modo que os estudantes possam fazer uso de diferentes recursos didáticos, instrumentos eficientes para levar a uma formação escolar de qualidade.

[1]bianca.fonseca@colegioeticasaocarlos.com.br
[2]jasalvador@ufscar.br

O Laboratório de Ensino, Pesquisa e Extensão de Matemática de uma universidade é um local de intercâmbio, partilha e formação de professores em que se deve criar e ampliar a potencialidade dos materiais didáticos e que eles possam manipular, verbalizar, abstrair em todos os níveis.

Nesse sentido, questionamos os objetivos e como os desafios podem contribuir no processo de ensino e aprendizagem. Que tipo de desafio é adequado para explorar determinado(s) conteúdo(s)? Onde e quando podemos utilizá-lo? E se não existir como criá-lo? Como preparar as atividades que serão exploradas com ele? O que podemos esperar de retorno dos estudantes?

A exploração de materiais pedagógicos às vezes são limitadas, mas podem ser enriquecidos introduzindo muitos questionamentos, como por exemplo, as Fichas de Atividades para os estudantes e um tipo de orientação detalhada para que o professor orientador otimize a sua utilização, desde a investigação da história, a construção geométrica sustentável envolvendo cálculos como as medidas de comprimentos, áreas e volumes adequados para atender as características do material.

A necessidade da reformulação e ampliação das possibilidades de exploração dos desafios, conhecidos como competitivos, poderia auxiliar na formação de um ambiente educacional cooperativo, em que todos os estudantes de uma turma poderiam participar ativamente em grupos e saírem vitoriosos no aprendizado de conceitos e técnicas básicas da Matemática.

O conhecimento do conteúdo matemático específico, conhecimento curricular, conhecimento tecnológico e o conhecimento pedagógico do conteúdo adquirido pelos licenciandos pode levá-los a manusear metodologias ativas para levarem aos alunos do ensino básico, uma interação com materiais didáticos. Para uma compreensão mais profunda dos movimentos da Torre de Hanói propiciamos o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, descobrimento de padrões, observação e cálculo dos elementos geométricos para a exploração do desafio sendo importante o trabalho cooperativo em equipe. Apresentamos ainda uma discussão sobre a relação da Torre de Hanói com a Teoria de Grafos e o Triângulo de Sierpinski a fim de despertar o interesse dos participantes e ampliar o horizonte de investigação.

2 A Torre de Hanói

Escolhemos para mostrar aqui Torre de Hanói, conforme a Figura 1 a seguir, com o objetivo de induzir o estudante a perceber leis matemáticas de formação e descobrir padrões, sobretudo, trabalhando com o desenvolvimento de habilidades mentais, tais como: estabelecimento de um plano de ação durante a movimentação dos anéis, respeitando as regras:

a) mudança dos anéis da torre de partida T_0 para a Torre de chegada T_2 usando a torre intermediária T_1 como auxiliar;

b) só se pode deslocar um anel de cada vez de modo que nenhum anel de menor diâmetro fique abaixo de um anel de diâmetro maior

A ordem dos anéis em qualquer torre é sempre crescente, ou seja, o anel que denominarmos de anel A_1 será sempre o menor (anel de menor diâmetro) e o e-nésimo anel A_n o de maior diâmetro. E para isso, em qualquer deslocamento exigirá concentração, investigação de um algoritmo matemático, desenvolvimento da capacidade cognitiva e socialização.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0458

Figura 1: Torre de hanói com 7 anéis. Fonte: Foto dos autores.

Como objetivos de aprendizagem podemos citar que os estudantes devem investigar e conhecer a Torre de hanói no contexo escolar, explorar a sua história, a sua construção geométrica, as suas características e o espaço escolar para a realização e adaptação do desafio para cooperatividade com criatividade e controle.

Para o orientador e cada um dos participantes é importante saber respeitar as diferenças individuais de desempenho dos colegas, identificar novas habilidades motoras básicas e aprimorá-las no decorrer das movimentações das peças.

É necessário conhecer o desafio no contexto comunitário e escolar, identificar as características do desafio proposto. Reconhecer o espaço escolar para a realização e adaptação do desafio, utilizar o potencial intencionalmente com criatividade, controle e adequação do desafio. Identificar novas habilidades motoras básicas e aprimorá-las ao longo das tentativas ensaiadas, e num Laboratório é necessário, não somente o kit didático, como se fosse um depósito de materiais, mas também uma Folha de Atividades para orientação das atividades que devem ser adapatada a cada clientela.

Propomos aos estudantes de Licenciatura que discutissem a ampliação das possibilidades de uso dos materiais didáticos. Nesse caso apresentamos algumas possibilidades de exploração de conceitos matemáticos da Torre de Hanói, que comumente se procura o número mínimo de deslocamentos dos anéis (discos) de uma primeira torre para uma terceira respeitando a regra de que sempre um de menor diâmetro deve estar sobre um de maior, utilizando uma torre auxiliar para movimentar os $n, n = 1, 2, 3, \ldots$ anéis. Os participantes puderam exercitar em duplas ou individualmente para realizar uma série de atividades relacionadas ao famoso quebra-cabeça Torre de Hanói.

Eles foram desafiados a pesquisar virtualmente a história, a possibilidade de construção geométrica considerando as medidas dos anéis, as distâncias convenientes entre as torres (pinos), o tamanho da base, entre outros elementos geométricos, construir com materiais recicláveis e o desafio em si. Deviam anotar os possíveis deslocamentos de cada anel, e então, determinar o número mínimo de movimentos necessários para resolver o problema da Torre de Hanói com $n = 1, 2, 3, \ldots$ anéis.

Utilizando diferentes quantidades de anéis para observações dos movimentos possíveis, busca-se estratégias e descobertas de padrões.

3 Equação Discreta da Torre de Hanói

Uma das principais questões que intrigam os participantes do desafio da Torre de Hanói é encontrar uma equação discreta que relacione o número de anéis com o número mínimo de movimentos necessários para resolver o quebra-cabeça. Atividade que pode ser feita de forma coletiva e com orientação e observações para explorarem uma sequência recursiva de maneira lúdica e interativa para relacionar o número mínimo de movimentos com $n, n \geq 1$ anéis.

A partir das observações feitas na Tabela 1, podemos levar o participantes concluir que uma estratégia da Torre de Hanói será dada por: deslocar $n-1,\ n = 2, 3, \ldots$ anéis para a haste auxiliar com h_{n-1} movimentos, em seguida deslocar o anel maior para a haste final com 1 movimento, e, por fim, deslocar os $n-1$ anéis da torre intermediária para a torre final com h_{n-1} movimentos, completando o objetivo do desafio.

Tabela 1: Esplorando os movimentos dos anéis.

n (Anéis)	Movimentos possíveis	Número mínimo de movimentos
1	A_1T_2, A_1T_3 ou A_1T_3	$h_1 = 1$
2	A_1T_2, A_2T_3, A_1T_3 ou ...	$h_2 = h_1 + 1 + h_1 = 2h_1 + 1 = 3$
3	$A_1T_3, A_2T_2, A_1T_2, A_3T_3, A_1T_1, A_2T_3, A_3T_3$ ou ...	$h_3 = h_2 + 1 + h_2 = 2h_2 + 1 = 7$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	...	...

Assim, a fórmula recursiva encontrada para os deslocamentos mínimo durante a resolução é igual aos deslocamentos h_{n-1} de $n-1$ anéis da primeira torre T_0 para a torre auxiliar T_1, mais o último anel A_n deslocado uma única vez para a torre de chegada T_2 e mais uma vez os deslocamentos h_{n-1} de $n-1$ anéis da torre auxiliar para a de chegada, de modo que $h_n = 2h_{n-1} + 1, n = 2, 3, \ldots$.

A solução dessa equação discreta em função apenas do número de anéis n pode ser obtida escrevendo sucessivamente cada termo da sequência h_n em função do anterior, como na Tabela 1, vemos como ocorre nos deslocamentos. Outro modo, é resolver a equação discreta de primeira ordem não homogênea. com uma condição inicial do jogo (já que a equação é de primeira ordem), e considerando que com apenas 1 anel, temos $h_1 = 1$. Logo, obtemos a equação e sua solução(1).

$$h_n = 2\,h_{n-1} + 1 \quad \Longrightarrow \quad h_n = 2^n - 1 \tag{1}$$

Do mesmo modo, incentivamos organização em uma tabela como a Tabela 2 em anotamos o número de movimentos mínimo de cada anel e o total dos movimentos para uma torre com $n = 1, 2, 3, \ldots$ anéis. Nesta tabela fica claro os anéis que mais se movimentam e os que menos se movimentam.

Tabela 2: Quantidade de movimentos mínimo de cada anel.

Número de anéis	Número de deslocamentos de cada anel					
	A_1	A_2	A_3	...	A_n	Totais
1	1					1
2	2	1				3
3	4	2	1			7
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	2^{n-1}	2^{n-2}	2^{n-3}	...	1	$2^n - 1$

4 Representação dos Deslocamentos num Grafo

Ao explorar a Torre de Hanói, levamos os estudantes a tabelar os possíveis movimentos assim como o número de movimentos de cada anel e a fazer gráficos. Representar todos os possíveis movimentos num grafo plano e buscar estruturas e padrões que permitam compreender a relação entre as etapas do desafio e a formação da estrutura fractal como a do triângulo de Sierpinski.

Os possíveis caminhos do único anel A_1 entre as jogadas da Torre de Hanói podem ser relacionados com os deslocamentos dele com as arestas ligando os vértices (torres) de um Grafo como na Figura 2 a seguir.

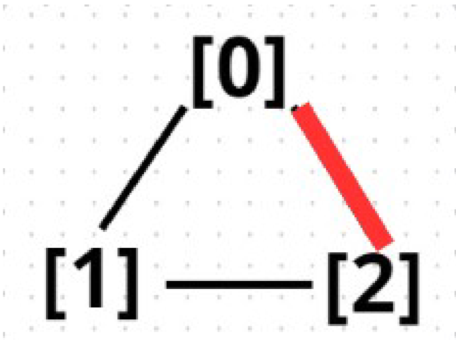

Figura 2: Movimento Mínimo 1 anel. Fonte: dos autores.

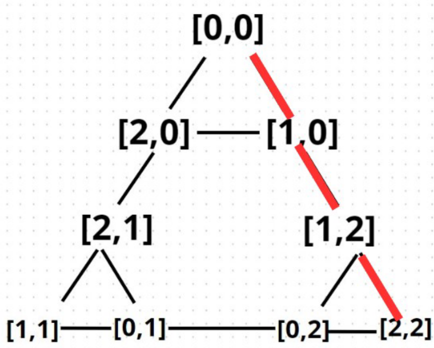

Figura 3: Movimento mínimo 2 anéis. Fonte: dos autores.

Assim, um Grafo H_1 contem todas as **Arestas:** $\{[0],[1]\}, \{[0],[2]\}$, $\{[1],[2]\}$, (caminhos possíveis como lados do triângulo) ligando os vértices **Vértices:** $[0],[1],[2]$ representando a posição das torres (T_0), (T_1) e (T_2) respectivamente.

Na Torre de Hanói com um anel, temos **três vértices** e **três arestas** [2]. Significa que para a quantidade de anel disponível, todas as torres podem servir como um possível movimento de translação. Da torre de partida [0] (T_0) podemos ir para a torre intermediária [1] (T_1) e da torre [1] para a [2] (T_2), ou diretamente de [0] para a de chegada [2] como destacados na Figura 2.

Para a Torre de Hanói de 2 anéis, podemos ver os movimentos possíveis e o mínimo de movimentos marcados na Figura 3.

Para uma Torre de Hanói com 3 anéis, conforme Figura 4 temos:

Vértices: $[0,0,0],[1,0,0],[2,0,0],[1,2,0],\ldots,\ [0,0,1],[1,2,2],[2,2,2]$.

Arestas: $\{[0,0,0],[1,0,0]\}, \{[1,0,0],[2,0,0]\}\ldots, \{[1,0,2],[1,2,2]\}, \{[1,2,2],[2,2,2]\}$.

A posição [1,0,2], por exemplo, representa que em uma Torre de Hanói com 3 anéis, o anel A_1 de menor diâmetro estará na posição da torre [1] , o anel A_2, (maior que o anel A_1 e menor que o anel A_3), estará na torre inicial [0] e, por fim, o anel A_3, estará na torre de chegada [2].

Analogamente, poderíamos representar uma Torre de Hanói com $n, n \in \mathbb{N}$ anéis.

Na Torre de Hanói com um único anel A_1, ele terá a possibilidade de movimentar-se pelas três torres, ou seja, um total de $3^1 = 3$ vértices e posições possíveis.

Para a Torre de Hanói com 2 anéis, temos a possibilidade para cada anel três torres possíveis para transladar, de modo que temos $3^2 = 9$ vértices e doze arestas possíveis .

Para a Torre de Hanói com 3 anéis temos $3^3 = 27$ vértices que podemos visualizar no grafo da Figura 4.

Generalizando para Torre de Hanói com n anéis, a quantidade de vértices que o grafo deverá ter é igual a 3^n. Reafirmando que isso nos trás as possíveis posições que cada anel pode estar, uma

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0458

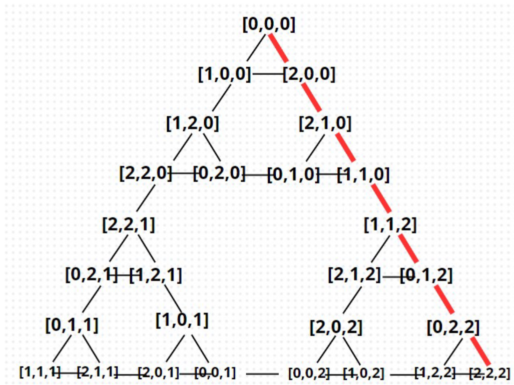

Figura 4: 7 Movimentos Possíveis. Fonte: dos autores.

vez que cada anel pode estar em qualquer uma das torres, independentemente dos demais e claro, sempre respeitando as regras originais do jogo.

Como já vimos no início, o número mínimo de movimentos possíveis a ser realizado para uma Torre de Hanói de n anéis é $2^n - 1, n = 1, 2, 3\ldots$ movimentos.

Observamos na lateral direita de cada grafo temos o menor caminho, a quantidade de arestas mínimas, a quantidade de movimentos que podem ser feitos do marco inicial da torre [0] até atingir o objetivo do desafio que é chegar a torre final [2] com o mínimo de movimentos.

A mesma coisa para um Grafo H_5 representando uma Torre de Hanói com 5 anéis. A quantidade de arestas que terá na lateral de seu grafo para concluir o objetivo do jogo serão 31 arestas. E assim basta saber que $2^n - 1$ é o resultado da modelagem que dá o número mínimo de movimentos possíveis para n anéis, e, desse modo, saberemos quantas arestas serão relacionadas do ínicio ao fim da lateral direita do grafo.

Agora, a partir dos grafos contruídos até o momento, iremos para uma outra análise e verificar a relação das imagens anteriores com o Triângulo de Sierpinski. Se observarmos com cautela, perceberemos que o Grafo H_2 é formado por três grafos de H_1, enquanto o Grafo H_3 é formado por três grafos de H_2. E assim sucessivamente, o Grafo H_n terá três vezes o formato do grafo H_{n-1}.

E ainda mais, quanto mais discos a Torre de Hanói tiver, mais a imagem irá se repetir em pedaços menores, e ficará mais parecido com um Triângulo de Sierpinski.

4.1 Ficha de Atividades

1. Na construção da sua Torre de Hanói de $n, n \geq 1$ anéis qual foi o diâmetro d do maior anel? Qual distância mínima entre as torres foi considerada? Qual é a relação da distância entre elas e o diâmetro do anel maior?

2. Quantos movimentos é possível fazer com cada anel? Elabore uma tabela como a Tabela 1 com linhas para cada jogada possível com $A_1, A_2, A_3, \ldots$ anéis indicando os possíveis movimentos deles da torre T_0 de partida para a torre T_2 de chegada, usando a torre T_1 intermediária, com deslocamentos de uma para outra, respeitando a regra dos anéis maiores não sobreporem os menores, usando o número mínimo de movimentos.

3. Qual(is) o(s) anel(is) que mais se movimenta(m) para obter o número mímimo de movimentos para deslocar os anéis?

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0458

4. Qual(is) o(s) anel(éis) que menos se movimenta(m) para obter o número mínimo de movimentos?
5. Sem efetuar o jogo, é possível calcular o número mínimo de movimentos para 6, 7, 8, 9 ou 10 anéis? É possível obter um fórmula geral para o desafio com $n, n \in \mathbb{N}$ anéis?
6. Faça uma tabela e descubra a relação entre o número de peças e o número mínimo de movimentos. Escreva sobre o que observaram.
7. Quantas vezes cada um dos $n, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ anéis se movimenta para alcançar o número mínimo de movimentos em cada jogada? Representar numa tabela como a Tabela 2.
8. Faça um gráfico do número de anéis n pelo número o mínimo de movimentos e explore-o.
9. Modele a equação discreta que representa o número mínimo de movimentos e resolva-a.
10. Numa Torre de Hanói com 64 anéis qual é o número mínimo de movimentos? Uma pessoa pode realizá-los em uma vida fazendo um movimento por segundo?
11. Pesquisar sobre a Teoria dos Grafos e sobre o Triângulo de Sierpinsk.
12. Encontre as semelhanças entre a representação dos movimentos possíveis da Torre de Hanói, os números de Mersene e esses dois temas sugeridos.

5 Considerações Finais

A experiência de propor atividades de exploração ampliadas da Torre de Hanói foi muito proveitosa, sendo que a Ficha de Atividades foi testada com licenciandos e as dez primeiras questões foram aplicadas com estudantes do ensino básico em uma escola pública.

Para os estudantes de Licenciatura em Matemática acrescentamos as questões relacionadas com grafos, números de Mersene e o triângulo de Sierpinski instigando-os a refletirem e entenderem os principais conceitos de grafos e de fractal, conceitos matemáticos que nem sempre são abordados.

Acreditamos que também podemos aplicar uma Ficha de Atividades deste tipo completa com os estudantes do ensino básico, caso tenhamos novas oportunidade de orientá-los convenientemente.

Referências

[1] F. O. Brotto. **Jogos Cooperativos: o jogo e o esporte como um exercício da convivência.** 1a. ed. Santos: Projeto Cooperação, 2001.

[2] B. A. Fonseca. "Torre de Hanói e sua relação com grafos e triângulo de Sierspinski". Em: TCC: Repositório da BCo UFSCar, 2023.

[3] J. Huizingga. **Homo Ludens: o jogo como elemento da cultura**. 5a. ed. São Paulo: Perpectiva, 2002.

[4] T. Orlick. **Vencendo a Competição**. 1a. ed. São Paulo: Círculo do Livro, 1989.

[5] J. Piaget. **A formação do símbolo na criança**. 3a. ed. São Paulo: Zahar, 1973.

[6] L. S. Vygotsky. **Formação social da mente**. Reimpressão. São Paulo: Martins Fontes, 2021. ISBN: 8533608182021.

