

# Atividades Dinâmicas e Interativas para Aprendizado das Propriedades Reflexivas das Cônicas

Nara Bobko<sup>1</sup>

DAMAT/UTFPR, Curitiba, PR

Leonardo Antonio Borgo<sup>2</sup>

Colégio Estadual Teotônio Vilela, Curitiba, PR

**Resumo.** Este trabalho apresenta atividades educacionais destinadas a estudantes da educação básica, desenvolvidas com o objetivo de facilitar a compreensão das propriedades de reflexão das cônicas. Utilizando a plataforma interativa GeoGebra, as atividades são dinâmicas, estimulando a aprendizagem ativa, exploratória e lúdica dos estudantes, em conformidade com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular. Cada atividade aborda a propriedade de reflexão de uma das cônicas, oferecendo um breve embasamento teórico, descrição prática e aplicações no cotidiano, enriquecendo e facilitando a compreensão dos estudantes sobre as propriedades de reflexão da elipse, da hipérbole e da parábola.

**Palavras-chave.** Propriedades de Reflexão das Cônicas, Recursos tecnológicos e computacionais, Ensino de matemática, GeoGebra.

## 1 Introdução

As seções cônicas têm suas origens na antiguidade grega. O famoso tratado “As Cônicas” foi escrito pelo matemático grego Apolônio de Perga no século III a.C. Entretanto, essas curvas já eram conhecidas cerca de um século e meio antes [3]. Apesar de antigas, as seções cônicas ainda são muito relevantes nos dias atuais. Em particular, suas propriedades reflexivas permeiam diversos contextos práticos, como faróis de automóveis, refletores odontológicos, lentes de telescópio, antenas de comunicação e sistemas de GPS (*Global Positioning System*).

Apesar de sua pertinência, muitos estudantes não compreendem plenamente as propriedades de reflexão dessas curvas, encontrando dificuldades em relacionar a formalização matemática dessas características com suas aplicações práticas. Muitos livros didáticos voltados para o Ensino Médio citam, sem explorar com profundidade, exemplos de aplicações práticas dessas propriedades. Em certo grau, essa abordagem pode auxiliar os estudantes neste processo de aprendizagem. Todavia, parece não ser suficiente para a compreensão de muitos. Neste contexto, buscar abordagens alternativas para este tópico pode ser significativo para potencializar a assimilação desse conteúdo.

Com o intuito de facilitar a compreensão do conteúdo pelos estudantes, desenvolvemos três atividades dinâmicas e interativas, cada uma abordando a propriedade de reflexão de uma das cônicas não degeneradas: elipse, hipérbole e parábola. Estas atividades propiciam a diversificação de representações semióticas destes objetos matemáticos o que, segundo Duval [5], auxilia em uma compreensão mais profunda do próprio objeto. As atividades foram estruturadas para instigar a curiosidade intelectual dos estudantes através da exploração, reflexão, imaginação e criatividade, promovendo a investigação de causas e efeitos na resolução de problemas. Além disso, buscam

---

<sup>1</sup>narabobko@utfpr.edu.br

<sup>2</sup>leonardo.borgo96@gmail.com

fomentar a utilização crítica, significativa, reflexiva e ética de tecnologias digitais. Acreditamos que tais atividades atendem as recomendações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [4], em particular de forma mais direta os itens 1, 2 e 5 das Competências Gerais da Educação Básica e os itens 4 e 5 das Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio.

As atividades aqui apresentadas estão inseridas no livro dinâmico interativo *Aprendendo seções cônicas e suas propriedades de reflexão* [2], sendo este material produzido no escopo da dissertação de mestrado do PROFMAT intitulada *Livro dinâmico interativo para aprendizado de seções cônicas e suas propriedades de reflexão* [1].

## 2 Estrutura das Atividades Propostas

O material foi elaborado para auxiliar na compreensão das propriedades de reflexões das cônicas. Com esse objetivo, o material foi projetado para instigar os estudantes, estimulando a investigação de causas e efeitos.

Para promover uma abordagem ativa e exploratória, desenvolvemos o material utilizando a plataforma interativa GeoGebra [6]. Essa abordagem permite a participação interativa do estudante, estimulando o uso de recursos tecnológicos como facilitadores de aprendizado, além de promover a utilização crítica, significativa, reflexiva e ética de tecnologias digitais.

Cada uma dessas atividades é composta por três etapas. A primeira oferece uma breve introdução à propriedade matemática a ser explorada, proporcionando o embasamento necessário para a execução da atividade como um todo. Mesmo tendo uma abordagem mais teórica, essa etapa foi construída com elementos interativos, visando estimular a construção ativa do conhecimento. A segunda etapa, intitulada "Brincando e aprendendo", representa o núcleo da atividade, consistindo em um desafio que relaciona a propriedade das cônicas a uma situação do mundo real. Nesse estágio, incorporamos elementos de jogos para tornar as atividades mais lúdicas, incentivando a imaginação, a criatividade dos estudantes e tornando-as mais envolventes. Por fim, cada atividade encerra-se com uma curiosidade sobre a propriedade em questão, buscando instigar os estudantes a aprofundarem seus conhecimentos.

A seguir, explicaremos com mais detalhes cada uma das atividades propostas. Com o objetivo de estabelecer claramente a propriedade que será abordada, apresentaremos no início de cada seção a respectiva definição em linguagem matemática formal. As demonstrações detalhadas dessas propriedades podem ser encontradas em Borgo [1].

## 3 Atividade: Propriedade de Reflexão da Elipse

A propriedade a ser explorada nesta atividade afirma que, se um raio de luz emitido de um dos focos da elipse atinge a elipse, ele será refletido de forma a passar pelo outro foco. O Teorema 3.1 enuncia esta propriedade em linguagem matemática.

**Teorema 3.1.** *Seja  $t$  a reta tangente no ponto  $P$  de uma elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$ . Então os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  formados pela reta  $t$  e os raios focais são iguais.*

A primeira parte da atividade proposta consiste de com uma breve explicação textual sobre a propriedade em questão e então apresenta uma construção que visa ilustrar geometricamente o resultado enunciado no Teorema 3.1 (vide Fig. 1). Nesta construção, o estudante pode observar que os ângulos formados pelos raios focais e a reta tangente são iguais. Embora a captura de tela desta construção possa parecer ter o mesmo efeito que as figuras usualmente presentes em livros didáticos, por se tratar de uma construção dinâmica, os estudantes têm a flexibilidade de alterar

o ponto  $P$  da elipse, modificar a posição dos pontos que definem os focos da elipse e até mesmo mudar a posição da elipse em si. Essa abordagem permite que os estudantes explorem inúmeras situações com elipses distintas e visualizem que a propriedade enunciada pelo teorema permanece válida.

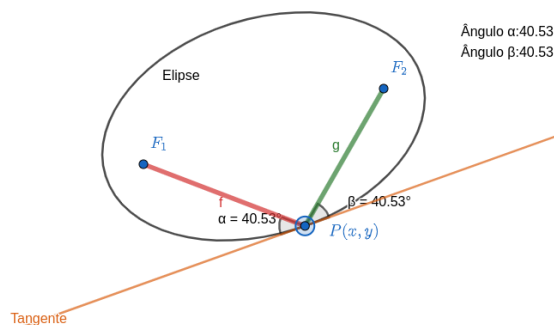


Figura 1: Construção que ilustra o Teorema 3.1. Fonte: Borgo [2].

A segunda parte da atividade consiste em simular a reflexão da luz usando como exemplo um refletor odontológico, espelho comumente acoplado às cadeiras de dentistas. Escolhemos essa aplicação por ser algo presente na vida da maioria dos estudantes, buscando assim estimulá-los a perceber que este conceito matemático está presente em seu cotidiano.

O espelho refletor da cadeira de dentista precisa ter a propriedade de refletir a luz em um ponto específico, a boca do paciente, a fim de evitar que a luz atinja todo o rosto do paciente, o que seria desconfortável. Além disso, deve ser suficiente para iluminar com clareza, evitando sombras intensas, o que descarta o uso de luz pontual. Por isso, esses refletores possuem formato correspondente a uma parte de uma elipse, onde a fonte de iluminação está em um dos focos. Nesse cenário, o estudante é estimulado a posicionar o refletor para que a iluminação fique adequada. Nesta atividade, por meio dos controles deslizantes é possível alterar a posição do refletor tanto na posição vertical quanto horizontal, conforme mostra a captura de tela presente na Fig. 2.

**B brincando e aprendendo**

Na atividade a seguir, você será o dentista e terá que acertar a iluminação para que consiga extrair o dente. Sabendo que o espelho refletor possui formato que corresponde a parte de uma elipse, e que a fonte de iluminação encontra-se em um dos focos desta elipse, mova os controles deslizantes para posicionar a luminária.

Lembre da propriedade de reflexão que vimos.



Figura 2: Atividade referente à propriedade de reflexão da elipse. Fonte: Borgo [2].

Após o estudante determinar a posição que considera apropriada, ele pode clicar no botão “VERIFICAR” para confirmar se a solução apresentada é adequada, conforme ilustra a Fig. 3. Em caso de resposta negativa, pode tentar novamente quantas vezes forem necessárias.

Espera-se que o estudante explore e perceba que a iluminação correta ocorrerá quando o outro foco da elipse estiver posicionado na boca do paciente.



Figura 3: Atividade sinalizando que a solução não está adequada. Fonte: Borgo [2].

A terceira parte da atividade apresenta informações sobre a importância da saúde bucal, acompanhada de uma breve explicação da atividade proposta anteriormente. Assim, caso o estudante não tenha compreendido a conexão entre o refletor odontológico e a propriedade de reflexão da elipse, terá a oportunidade de esclarecê-la neste momento. Além disso, essa seção menciona outra aplicação em que essa propriedade é utilizada, como em alguns aparelhos de radioterapia, e fornece a referência bibliográfica para quem desejar aprofundar-se no assunto.

A atividade pode ser acessada em <https://www.geogebra.org/m/fr2n8zsq>.

## 4 Atividade: Propriedade de Reflexão da Hipérbole

Assim como a propriedade de reflexão da elipse, a propriedade de reflexão da hipérbole também irá envolver os dois focos da cônica, mas não será o raio refletivo que passará no segundo foco, e sim seu prolongamento. Isto é, se um raio de luz for emitido de um dos focos da hipérbole, ao atingir esta curva será refletido de forma que seu prolongamento, no sentido contrário, irá a passar pelo outro foco da hipérbole. Formalmente, esta propriedade é dada pelo Teorema 4.1, enunciado a seguir.

**Teorema 4.1.** *Seja  $t$  a reta tangente no ponto  $P$  de uma hipérbole de focos  $F_1$  e  $F_2$ . Então os ângulos  $\beta$  e  $\alpha$  formados pela reta  $t$  e os raios focais são iguais.*

Assim como na atividade proposta anterior, a primeira parte da atividade referente a propriedade de reflexão da hipérbole consiste de uma explicação textual concisa sobre a propriedade em questão e apresenta uma construção interativa da mesma, ilustrando o enunciado no Teorema 4.1, conforme ilustra a Fig. 4. Nessa construção, da mesma maneira que no caso da elipse, é possível modificar o ponto sobre a cônica e os focos da hipérbole para visualizar a ocorrência da propriedade em diferentes cenários.

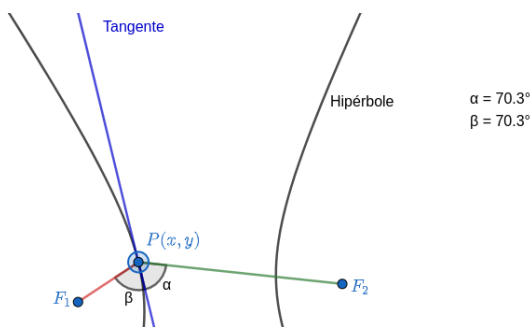


Figura 4: Construção que ilustra o Teorema 4.1. Fonte: Borgo [2].

Na segunda parte desta atividade, o estudante é introduzido a um jogo semelhante ao golfe, com o objetivo de acertar o buraco indicado pela bandeira vermelha. Contudo, devido a obstáculos no percurso, a tacada deve ser feita rebatendo a bola de golfe em um muro de curvatura hiperbólica, como ilustrado na Fig. 5. Além disso, o buraco está posicionado em um dos focos da hipérbole que define o muro. Assim como na atividade da elipse, o estudante pode testar e verificar o resultado quantas vezes forem necessárias. Espera-se que, com o embasamento teórico fornecido sobre a propriedade de reflexão da hipérbole, o estudante compreenda a necessidade de mirar no foco da hipérbole que não coincide com a posição do buraco.

**Brincando e aprendendo**

Na jogo a seguir você deverá acertar a bola de golfe no buraco, porém existe uma árvore na direção. Mova o ponto P para direcionar a mira da sua tacada.

Note que o muro possui um formato hiperbólico e que o buraco está localizado na mesma posição que um dos focos da hipérbole definida pelo muro.

Lembre-se do que vimos nesta aula.

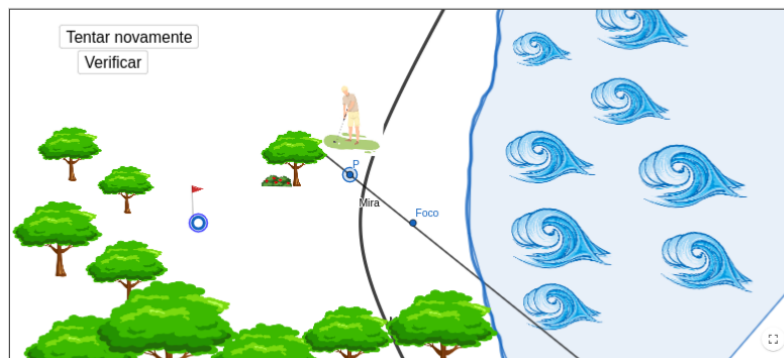


Figura 5: Atividade referente à propriedade de reflexão da hipérbole. Fonte: Borgo [2].

Devido à dificuldade que o estudante pode enfrentar ao posicionar a mira com exatidão, devido às limitações do mouse, decidimos incorporar uma certa tolerância no acerto do buraco. Além disso, é relevante destacar que a posição inicial do jogador é alterada a cada nova tentativa, tornando o jogo mais dinâmico.

Com o objetivo de oferecer mais uma aplicação prática da hipérbole no contexto do mundo real, a última parte desta atividade apresenta uma curiosidade relacionada à arquitetura da Catedral de Brasília, que incorpora curvaturas hiperbólicas em elementos de sua construção.

Esta atividade pode ser acessada em <https://www.geogebra.org/m/qzbwbeft>.

## 5 Atividade: Propriedade de Reflexão da Parábola

Ao contrário da elipse e da hipérbole, a parábola possui apenas um foco. Neste caso, um raio luminoso que passe pelo foco da parábola e, posteriormente, encontre esta curva, será refletido paralelamente ao eixo focal desta cônica. Ou equivalentemente, um raio luminoso paralelo ao eixo focal da elipse que encontre esta curva será refletido de forma a passar pelo foco desta cônica. O Teorema 5.1 apresenta esta propriedade em termos matemáticos.

**Teorema 5.1.** *Sejam  $t$  a reta tangente no ponto  $P$  de uma parábola de foco  $F$ ,  $\beta$  o ângulo entre  $t$  e o raio focal,  $r$  uma reta ortogonal à diretriz da parábola e que passa por  $P$ , e  $\alpha$  o ângulo entre a reta  $t$  e a reta  $r$ . Então  $\theta_1 = \theta_2$ .*

Na atividade proposta referente a parábola, a construção que ilustra a propriedade de reflexão desta cônica, enunciado no Teorema 5.1, é apresentada na Fig. 6. Os estudantes têm a possibilidade de modificar tanto o ponto  $P$  pertencente à parábola quanto o foco da cônica, possibilitando a visualização da propriedade em diversas circunstâncias distintas e, assim, auxiliando na compreensão dessa propriedade matemática.

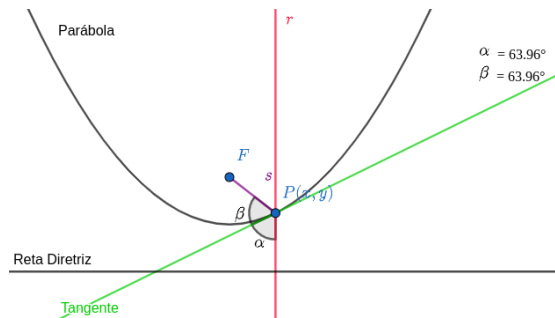


Figura 6: Construção que ilustra o Teorema 5.1. Fonte: Borgo [2].

Em seguida, a atividade simula a iluminação de uma bailarina em um palco. A proposta é que o estudante assuma o papel de um técnico de iluminação, podendo alterar a direção de um canhão de luz contendo um refletor parabólico, bem como a posição do foco de luz dentro do canhão. A expectativa é que o estudante compreenda que a posição do foco influenciará na abrangência das luzes refletidas, possibilitando iluminar a bailarina de forma apropriada ou não.

A Fig. 7 exibe duas capturas de tela ilustrando situações distintas. Na imagem à esquerda, a iluminação não está adequada, pois não cobre a bailarina por completo. Já na imagem à direita, com o foco posicionado mais à frente do canhão, a bailarina está devidamente iluminada.

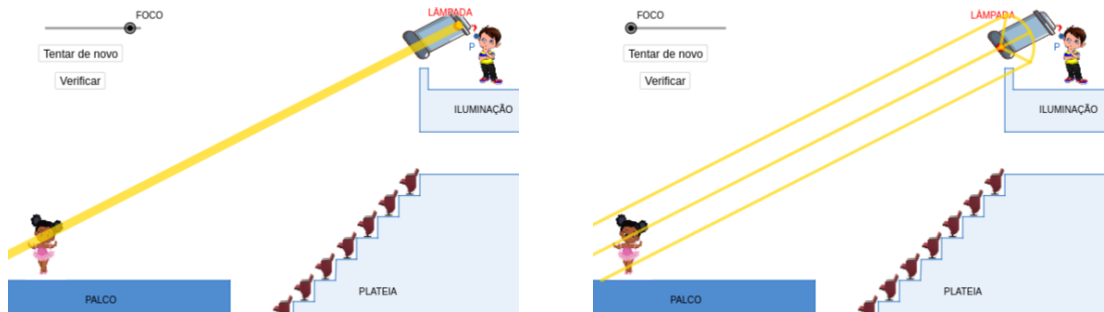


Figura 7: Atividade referente à propriedade de reflexão da Parábola. Fonte: Borgo [2].

A atividade conclui-se com uma curiosidade que relaciona a propriedade de reflexão das parábolas com as antenas parabólicas, proporcionando ao estudante mais uma aplicação prática deste conteúdo em seu cotidiano.

Esta atividade pode ser acessada em <https://www.geogebra.org/m/ckjq6ax>

## 6 Considerações Finais

As atividades dinâmicas e interativas propostas neste trabalho têm como objetivo facilitar o aprendizado das propriedades reflexivas das cônicas (elipses, parábolas e hipérbolas), alinhando-se com as diretrizes da BNCC. Elaboradas para estimular ativamente os estudantes a explorar possibilidades durante o processo de aprendizado, acreditamos que essas atividades possam oferecer uma experiência mais envolvente e prática, representando uma significativa contribuição para o aprendizado dos estudantes. No entanto, reconhecemos que as construções propostas podem ser lapidadas e aprimoradas, estando abertos a futuras melhorias e ajustes.

Destacamos que a elaboração desse tipo de atividade demanda não apenas um conhecimento profundo do tema abordado, mas também proficiência nas ferramentas computacionais utilizadas. Isso pode representar um desafio para muitos professores de educação básica. Conscientes do tempo muitas vezes escasso desses educadores, acreditamos que o material apresentado pode ser de grande valia para esses profissionais.

Portanto, acreditamos que as atividades dinâmicas e interativas propostas possam contribuir significativamente no processo de aprendizado das propriedades reflexivas das cônicas.

## Agradecimentos

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## Referências

- [1] L. A. Borgo. “Livro dinâmico interativo para aprendizado de seções cônicas e suas propriedades de reflexão”. Dissertação de mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2023.
- [2] L. A. Borgo e N. Bobko. **Aprendendo seções cônicas e suas propriedades de reflexão**. Acessado em 23/04/2024, <http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/742314>.
- [3] C. B. Boyer e U. C. Merzbach. **História da matemática**. Editora Edgard Blucher, 2002.
- [4] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Online. Acessado em 04/03/2024, <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Brasília.
- [5] R. Duval e M. Thadeu. “Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento”. Em: **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática** 7.2 (2012), pp. 266–297.
- [6] GeoGebra. **GeoGebra**. Online. Acessado em 27/02/2024, <https://www.geogebra.org/>.