

# Animação e Otimização: Modelos de Perseguição

Olívia S. Gomes<sup>1</sup>, João P. C. Oliveira<sup>2</sup>

UNIJUI, Ijuí, RS

Sérgio C. Bezerra<sup>3</sup>

UFPB, João Pessoa, PB

**Resumo.** Apresenta-se neste artigo, uma pesquisa que envolve três grandes áreas da matemática aplicada: computação gráfica, otimização e probabilidade. Com o objetivo principal de desenvolver estratégias de movimentação (captura e sobrevivência) entre personagens adversários numa animação onde cada movimentação será a partir de um problema de otimização ou regra probabilística. A dinâmica da movimentação será por meio da formulação e implementação de problemas de otimização que governarão a perseguição. Desse modo os modelos apresentados estão divididos em dois grupos: determinísticos e não determinísticos.

**Palavras-chave.** Animação, Otimização, Probabilidade, Estratégias, Modelos de Perseguição.

## 1 Introdução

O fato da computação gráfica ser uma área amplamente aplicada [7], a junção de seus conceitos com outros conceitos das áreas clássicas e modernas da matemática, como Otimização e Probabilidade, torna-se uma proposta interessante para a formulação de métodos e resolução de problemas diversos [6].

Neste trabalho, foram utilizados conceitos de computação gráfica, otimização e probabilidade para construção de estratégias de movimentação aplicadas a uma dinâmica de perseguição. O uso das técnicas de otimização justifica-se pelo fato de representar uma classe de problemas que consiste em realizar a melhor escolha dentre um conjunto de alternativas [1], ou seja, diz respeito à seleção de um critério usado para escolher uma solução que geralmente é representada por uma função que deverá ser minimizada ou maximizada [3]. Já o uso dos conceitos probabilísticos justifica-se pelo fato de deixar a perseguição um tanto mais dinamizada [4], atribuindo características aleatórias na movimentação.

Desse modo os modelos apresentados são classificados em modelos determinísticos e não determinísticos. Partindo deste princípio foram construídas estratégias de movimentação que governam a dinâmica de uma animação cujas formulações estão descritas nos tópicos adiante.

## 2 Materiais e Métodos

As implementações dos códigos para execução das simulações numéricas foram realizadas em OCTAVE versão 4.2.1. A seguir estão apresentados os modelos formulados neste estudo. No grupo 1, o primeiro modelo acontece sem restrições, o segundo modelo acontece em um semiplano gerado por uma reta; no grupo 2, temos o modelo unidimensional e o modelo bidimensional.

---

<sup>1</sup>olivia.gomes@sou.unijui.edu.br

<sup>2</sup>Joao.carau@sou.unijui.edu.br

<sup>3</sup>sergio@ci.ufpb.br

## 2.1 GRUPO 1: Modelos Determinísticos de Perseguição

### 2.1.1 Modelo Sem Restrições

Seja  $n_{sd} \in \{1, 2, 3\}$ . Considere uma região  $S \subseteq \mathbb{R}^{n_{sd}}$ , um ponto  $p_0 \in S$  e um círculo  $\zeta_{c,r} \subset S$  de centro  $c$  e raio  $r$ . O círculo e o ponto se movem como solução de um problema de otimização, dando início a uma perseguição.

A perseguição é uma sequência  $(p_k, c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . No instante  $k$ ,  $p_k \in S$  é a posição do ponto e  $c_k \in S$  é a posição do centro do círculo. O objetivo do círculo é capturar o ponto. Em contra partida, o ponto procura fugir do círculo. Tanto o ponto como o círculo, realizam movimentos para atingirem seus objetivos. Neste trabalho define-se movimento a uma direção  $d \in \mathbb{R}^{n_{sd}}$ .

Seja  $u > 0$  o comprimento do movimento do ponto, para qualquer  $k$ . O movimento do ponto em  $k$ , defini-se por  $d \equiv p_{k+1} - p_k$ . O ponto  $p_{k+1}$  é escolhido de modo que seja solução do seguinte problema de otimização denominado **Problema Do Movimento Do Ponto**:

$$\begin{aligned} & \max |p_{k+1} - c_k|^2 \\ & \text{sujeito a } p_k \in S \\ & |p_{k+1} - p_k|^2 = u^2 \end{aligned} \tag{1}$$

A equação (1) significa mover o ponto para a posição  $p_{k+1}$  de modo que esteja em  $S$ , se afaste de  $p_k$  uma distância  $u$  e maximize a distância ao centro do círculo  $c_k$ .

De igual forma, o movimento do círculo  $\zeta$  em  $k$  define-se por  $d \equiv c_{k+1} - c_k$ . O movimento do círculo deve verificar  $\zeta_{c_k,r} \subset S$  para todo  $k$ . Ou seja, dado que em certo instante é a vez do círculo se mover, deseja-se saber qual é o novo centro  $c_{k+1}$ . Ele é escolhido como um ponto da fronteira do círculo, de modo a resolver o que chamaremos de **Problema Do Movimento Do Círculo**:

$$\begin{aligned} & \min |c_{k+1} - p_{k+1}|^2 \\ & \text{sujeito a } |c_{k+1} - c_k|^2 = r^2 \\ & C_{c_{k+1},r} \subset S. \end{aligned} \tag{2}$$

A equação (2) significa mover o centro do círculo para a posição  $c_{k+1}$  de modo que o círculo de centro em  $c_{k+1}$  e raio  $r$  esteja em  $S$ , se afaste de  $c_k$  uma distância  $r$  e minimize a distância ao ponto  $p_{k+1}$ . A perseguição é finita quando existe  $K$  tal que  $p_K \in \zeta_{c_K,r}$ .

As equações (1) e (2) governam a dinâmica da perseguição, como mostra a figura 1.

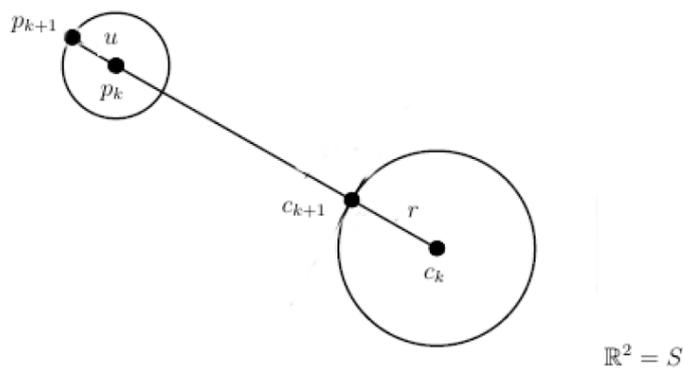


Figura 1: No tempo  $k$  o ponto está em  $p_k$  e se move para  $p_{k+1}$  e o círculo de centro  $c_k$  se move para  $c_{k+1}$ .  
Fonte: Autoria própria.

O modelo tem os seguintes dados fixos:

1.  $S$ : Região de  $\mathbb{R}^{n_{sd}}$ .
2.  $p_0 \in S$  posição inicial do ponto.
3.  $c_0 \in S$  posição inicial do centro do círculo.
4.  $u > 0$  comprimento do movimento do ponto, para qualquer  $k$ .
5.  $r > 0$  comprimento do movimento do círculo, para qualquer  $k$ .

### 2.1.2 Modelo Com Restrição De Um Semiplano Gerado Por Uma Retas

Para fins de implementação foram atribuídos arbitrariamente os seguintes valores às variáveis  $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : a^T x \leq d\}$ ,  $a = (1, -7)$ ,  $d = 10r$ ,  $r = 1$  e  $u = 0.5$ .

**Movimento Do Ponto:**

$$\begin{aligned}
 p_{k+1} = \arg \max_{x \in \mathbb{R}^{n_{sd}}} & |x - c_k|^2 \\
 \text{sujeito a} & |x - p_k|^2 \leq u^2 \\
 & \frac{|a^T x - d|^2}{a^T x} \geq 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

A segunda restrição da equação (3) exige que a distância de  $x$  à reta seja maior ou igual a zero. Isto significa que  $p_{k+1}$  está em um semiespaço definido pela reta.

**Movimento Do Círculo:**

$$\begin{aligned}
 c_{k+1} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^{n_{sd}}} & |x - p_{k+1}|^2 \\
 \text{sujeito a} & |x - c_k|^2 \leq r^2 \\
 & \frac{|a^T x - d|^2}{a^T x} \geq r^2
 \end{aligned} \tag{4}$$

A segunda restrição da equação (4) consiste em pedir que a distância de  $x$  a reta seja maior ou igual a  $r^2$ . Isto faz com que  $c_{k+1}$  (o centro do próximo círculo) esteja em uma distância  $r$  da reta. Desta forma o círculo estaria dentro de  $S$ .

## 2.2 GRUPO 2: Modelos Não Determinísticos De Perseguição

O modelo sem restrições tem solução trivial quando  $S = \mathbb{R}^2$ , mostrado a seguir. Por isso, introduziu-se uma característica aleatória. Considera-se a região  $T$  do plano  $S$  definida em coordenadas polares por  $u \in [0, \infty]$  e  $\alpha \in [-\theta, \theta]$ ,  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Agora, defini-se uma região  $U_v, w$  que corresponde a rotação da região  $T$  de tal forma que o eixo principal ficará em certa direção  $v$  e efetua-se uma translação até um ponto  $w$ . O ponto  $p_0$ , nesse contexto vai pular para um ponto  $p_1$  escolhido aleatoriamente na região  $U_v, w$ , a partir de uma distribuição conjunta [2]  $f(u, \alpha)$ , onde  $u$  é função de  $z$ . já o círculo permanece se movimentando de forma determinística.

### 2.2.1 Modelo Unidimensional

Neste modelo, o ponto encontra-se inicialmente na abscissa  $x_0 > 0$  e o círculo, que nesse caso é um intervalo, está centrado na origem e possui largura  $2r$ . Para início do problema suponha-se que  $r < x_0$ . Suponha - se ainda que a cada instante de tempo, de forma independente, o ponto se locomove para a direita segundo uma variável aleatória exponencial de parâmetro  $\lambda$ , ou seja,

$X \sim Exp(\lambda)$ . Para isso é fixado um valor esperado para  $X$  de modo que a posição sorteada fique próxima a esse valor, pois a lei dos grandes números garante que que um experimento realizado  $n$  vezes, e  $n$  grande, tende em média para sua esperança [2]. Como a dinâmica do círculo permanece a mesma, enfatiza-se nesta descrição a dinâmica do ponto apenas.

### 2.2.2 Modelo Bidimensional

Sejam dados  $q_0 \in \mathbb{R}^2$  correspondendo ao centro do círculo,  $p_0 \in \mathbb{R}^2$  à posição inicial do ponto e  $p \neq q$ . Ao traçar uma reta que passe por  $q_0$  e  $p_0$ , existe um ângulo  $\theta$  que define um cone. O ponto movimenta-se primeiro e ao movimentar-se é sorteado dois parâmetros: um ângulo  $\alpha \sim U[-\theta, \theta]$  e uma passo  $u$ . O passo  $u$  é sorteado conforme uma variável contínua exponencial de parâmetro  $\lambda$  [2], ou seja,  $u = X \sim Exp(\lambda)$ . Para isso, assim como no caso unidimensional, é fixado um valor esperado para  $X$  de modo que a posição sorteada não fique tão distante desse valor. Essa é a nova posição do ponto  $p$ . Após o movimento do ponto, é traçada uma reta contendo o centro do círculo e a nova posição do ponto, calcula-se a distância  $p_1 - q_0$ , divide pela norma e multiplica por  $u$ . Logo, tem-se um o movimento do círculo que configura o seu novo centro.

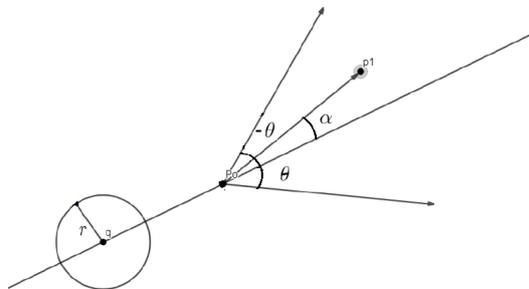


Figura 2: Ilustração do Modelo Bidimensional. Fonte: Autoria própria.

## 3 Resultados e Discussão

Em todas as situações para o GRUPO 1 tem-se  $kmax = 100$ ,  $p_0 = (0, 0)$ ,  $r = 1$ ,  $c_0 = (5r, 0)$  e  $n_{sd} = 2$ . Onde  $kmax$  representa o número máximo de iterações.

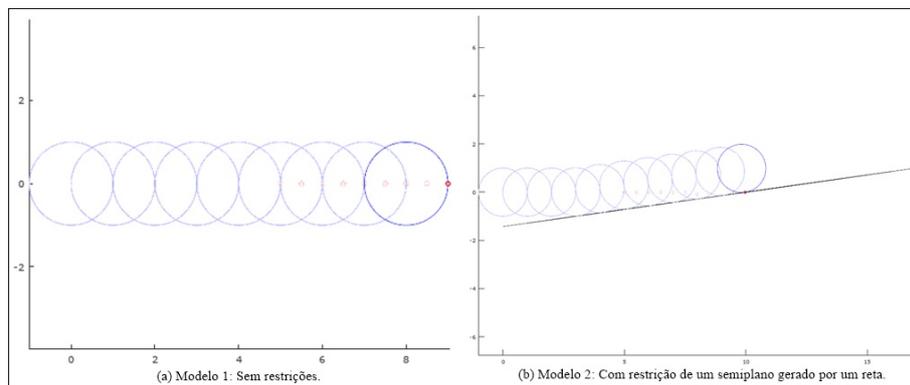


Figura 3: Simulação da perseguição dos modelos 1 e 2. Fonte: Autoria própria.

De acordo com a Tabela 1 os modelos determinísticos propostos neste estudo têm solução trivial quando  $S = \mathbb{R}^2$ , como citado anteriormente, ou seja, o círculo sempre consegue capturar o ponto no plano  $\mathbb{R}^2$ .

Tabela 1: Teste 1: Modelos Determinísticos.

$r = 1, u = 0.5, kmax = 100$	N° de movimentos até capturar
Modelo 1	09
Modelo 2	11
$r = 1, u = 0.9, kmax = 100$	N° de movimentos até capturar
Modelo 1	41
Modelo 2	50

Como nota-se na Tabela 1 para valores onde  $u < r$  o círculo captura o ponto, pois mesmo que o movimento do ponto consista em maximizar sua distância em relação ao centro do círculo, o mesmo sofre desvantagem por seu raio de movimentação ser menor. Quando  $u$  pequeno, o círculo leva menos tempo para captura, à medida que  $u$  cresce, também aumenta o número de movimentos para que haja captura.

Quando testado para  $u \geq r$ , o ponto não é capturado pelo círculo, uma vez que seu passo de movimentação o permite estar sempre à frente.

O movimento do ponto para o GRUPO 2 depende da esperança que por sua vez consiste em um valor fixo e intervalado escolhido arbitrariamente. Para o modelo unidimensional foi realizado uma simulação onde para cada valor esperado  $p$  realiza-se 100 experimentos, em cada experimento o ponto e o círculo realizam 100 movimentos ( $movmax = 100$ ). Se houver captura em até  $movmax$  movimentos e/ou caso não haja, finaliza-se e inicia-se outro experimento com a mesma esperança. Chegado ao fim dos experimentos, pula para o próximo valor esperado e o processo repete-se novamente. Os resultados foram os seguintes:

Tabela 2: Simulação Do Caso 1D Com 100 Experimentos.

$r = 1, movmax = 100$	Exp. com captura	Exp. sem captura
$p = 0.5$	100	00
$p = 0.6$	100	00
$p = 0.7$	100	00
$p = 0.8$	96	04
$p = 0.9$	71	29
$p = 1.0$	29	71
$p = 1.1$	12	88
$p = 1.2$	03	97
$p = 1.3$	00	100
$p = 1.4$	00	100
$p = 1.5$	00	100
TOTAL	511	589

De acordo com a Tabela 2, uma vez que para uma esperança cujo valor é menor que  $r$  como:  $p = 0.5, p = 0.6$  e  $p = 0.7$ , círculo consegue capturar o ponto em todos os experimentos. À medida que o valor da esperança vai se aproximando de 1, o número de capturas também vai diminuindo. Quando  $p \geq r$ , a dinâmica dos experimentos muda completamente de modo que o ponto consegue fugir do círculo nas três últimas baterias de experimentos. Logo, para uma esperança cujo valor

é menor que  $r$ , em média, o ponto é capturado certamente, agora quando o valor da esperança ultrapassa o valor de  $r$ , o ponto tem mais chances de fugir.

Para as simulações do modelo 2D usou-se os mesmos valores de  $r$  e das esperanças  $p$ . Mas como agora o movimento do ponto também depende de um ângulo  $\alpha \in [-\theta, \theta]$ , realizou-se 4 testes com 100 experimentos para cada valores esperados usando  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{3}$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Tabela 3: Simulações Do Caso 2D Para Diferentes Valores De  $\theta$  Eom 100 Experimentos.

Esperança $p$	Exp. com captura				Exp. sem captura			
	$\theta = \frac{\pi}{6}$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	$\theta = \frac{\pi}{3}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{6}$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	$\theta = \frac{\pi}{3}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
$p = 0.5$	100	100	100	100	00	00	00	00
$p = 0.6$	100	100	100	100	00	00	00	00
$p = 0.7$	100	100	100	100	00	00	00	00
$p = 0.8$	97	100	100	100	03	00	00	00
$p = 0.9$	90	92	98	100	10	08	02	00
$p = 1.0$	46	73	84	99	54	27	16	01
$p = 1.1$	16	22	55	96	84	78	45	04
$p = 1.2$	03	08	24	80	97	92	76	20
$p = 1.3$	01	03	08	56	99	97	92	44
$p = 1.4$	02	01	04	36	98	99	96	64
$p = 1.5$	01	00	03	22	99	100	97	78
TOTAL	556	599	676	889	544	501	424	211

Nota-se nos 4 testes uma certa similaridade quanto ao comportamento da perseguição. Utilizando  $p = r = 1$  como parâmetro é possível notar que para valores menores que este, o círculo apresenta vantagem sobre o ponto e vale salientar que pelo menos nas três primeiras etapas de experimentos essa vantagem é unânime. A medida que os valores ultrapassam  $p = r = 1$ , o ponto passa a ter vantagem sobre o círculo uma vez que o número de capturas diminui, exceto quando  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Um fato interessante é que conforme o ângulo  $\theta$  de movimentação do ponto aumenta, também aumentam as chances de sucesso para o círculo capturá-lo, consequentemente para um ângulo menor o ponto tem mais chances de evitar sua captura.

De acordo com Tabela 3, o círculo ganha nessa perseguição, sendo que as maiores chances de sucesso para ele acontece quando  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , já para  $\theta = \frac{\pi}{6}$  o ponto tem mais chances de fugir.

Estabelecendo comparações entre o modelo 1D e 2D, percebem-se as seguintes diferenças quando  $p = 1$ : na Tabela 2 o número de experimentos com captura é 29, na Tabela 3 o número passa a ser 16, 73, 84 e 99, respectivamente. Ou seja, vai aumentando o número de capturas quando aumenta-se  $\theta$ . Dessa forma, o círculo tem mais vantagem sobre o ponto quando a perseguição acontece no caso bidimensional.

## 4 Considerações Finais

Pelos resultados numéricos obtidos no modelo unidimensional foi possível verificar que se  $p < r$  então com probabilidade 1 o ponto é capturado, em contrapartida se  $p > r$  então com probabilidade positiva o ponto não é capturado.

Para o modelo bidimensional foi analisado o comportamento dos personagens usando diferentes valores de  $\theta$ . Todos os testes indicam que nessas situações o número de capturas ultrapassa o número de fugas. Vale salientar ainda que conforme o ângulo  $\theta$  de movimentação do ponto

aumenta, também aumenta as chances de sucesso para o círculo capturá-lo, consequentemente para um ângulo menor o ponto tem mais chances de evitar sua captura.

No Modelo unidimensional o ponto se locomove na direção em que o centro do círculo dirigiu-se anteriormente, enquanto que no modelo 2D o ponto se locomove numa direção diferente da movimentação anterior ao seu oponente. Pela desigualdade triangular [2] a distância do ponto em sua nova posição para a posição atual do centro do círculo, é menor que a soma das distâncias entre sua posição anterior em relação ao círculo e a distância entre as posições consecutivas do ponto. Este fato faz-se entender que os valores dos parâmetros ( $\theta$  e  $p$ ) influenciam na situação crítica, que no modelo 1D era  $p$  (esperança do valor do pulo do ponto). Tendo que o  $p$  no modelo 2D deve ser menor que o raio  $r$ .

As simulações também mostraram que sem os atributos aleatórios, os modelos apresentam soluções triviais, uma vez que para  $u < r$  o ponto sempre acaba sendo capturado pelo círculo e conforme  $u$  aumenta também aumenta o número de movimentações para que haja captura. Para  $u \geq r$ , não impondo um limite arbitrário de iterações, essa perseguição tende ao infinito.

Durante o período de formulação e execução da pesquisa, filtrar os objetos de estudos não foi uma tarefa tão simples, pois o tema trabalhado abria vertentes criativas a serem consideradas. Esse fato corrobora a afirmação apresentada na introdução quando cita ser uma proposta interessante misturar diferentes áreas da ciência na resolução de problemas diversos. E corrobora também a afirmação de Lobachevsky, vista em [5], quando diz: "não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real".

Para trabalhos futuros pretende-se aperfeiçoar os problemas e visualizar a dinâmica da perseguição através de técnicas mais robustas de animação e computação gráfica, acrescentar mais círculos e pontos ao problema e estender o modelo 2D para o espaço euclidiano.

## Referências

- [1] A. Izmailov e M. Solodov. **Otimização - volume 2. Métodos computacionais**. 3a. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. ISBN: 978-85-244-0454-2.
- [2] B. R. James. **Probabilidade: um curso em nível intermediário**. 5a. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2023. ISBN: 978-85-244-0455-9.
- [3] J. N. Kapur e H. K. Kesavan. "Entropy Optimization Principles and Their Applications". Em: **Entropy and Energy Dissipation in Water Resources**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1992, pp. 3–20. ISBN: 978-94-011-2430-0. DOI: 10.1007/978-94-011-2430-0\_1.
- [4] S. Ross. **Probabilidade: um curso moderno com aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2010. ISBN: 8577806219.
- [5] A. S. Sant'anna. **O que é um Axioma**. Barueri: Manole, 2003. ISBN: 8520416608.
- [6] L. Velho e J. Gomes. **Computação Gráfica: Imagem**. 2a. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2002. ISBN: 978-85-244-0088-9.
- [7] L. Velho e J. Gomes. **Fundamentos da Computação Gráfica**. 1a. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. ISBN: 978-85-244-0200-5.