Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Usando o GeoGebra 3D para Duplicar o Cubo e Reinterpretar Imagens

Olga H. Saito[1], Rudimar L. Nós[2]
UTFPR, Curitiba, PR
Katiane S. de Oliveira[3]
Colégio Estadual Rocha Pombo, Morretes, PR

Resumo. Apresentamos neste trabalho duas atividades para explorar conceitos e construções geométricas tridimensionais empregando o GeoGebra 3D, associando geometria, história da matemática e arte. As atividades abordam a duplicação do cubo e a releitura da fachada do Museu Oscar Niemeyer, e podem ser aplicadas nas disciplinas de geometria da Licenciatura em Matemática e também na Educação Básica, nesta com algumas adaptações. Concluímos que o GeoGebra 3D é uma ferramenta fantástica para desenvolver a concepção espacial de estudantes e professores(as), e que as atividades propostas estão em consonância com o que estabelece a Base Nacional Comum Curricular sobre o uso de tecnologias digitais e o desenvolvimento do pensamento computacional no ensino de matemática.

Palavras-chave. BNCC, Seções Cônicas, Prismas, Museu Oscar Niemeyer (MON).

1 Introdução

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [1] e o Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná (RCEMP) [17] enfatizam, em suas competências e habilidades específicas, o uso de tecnologias digitas e o desenvolvimento do pensamento computacional. A inserção das tecnologias em sala de aula permite desenvolver as competências gerais da BNCC, particularmente a competência 5:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva ([1], p. 9).

Em Matemática, "é evidente a necessidade do uso das tecnologias, incluindo as digitais, para introdução, compreensão, visualização, construção, comparação e operação de muitos conhecimentos matemáticos. As tecnologias colaboram, inclusive, com o desenvolvimento do pensamento computacional" ([17], p. 508).

O Parecer CNE/CES 1.302/2001 ([2], p. 4) destaca, nas competências e habilidades próprias do(a) educador(a) matemático(a), a capacidade de "desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos".

Espera-se então que os(as) futuros(as) professores(as) de matemática na Educação Básica sejam capazes de utilizar recursos tecnológicos e computacionais para desenvolver atividades para o

[1]ohsaito@gmail.com
[2]rudimarnos@utfpr.edu.br
[3]katimariaoliveira@hotmail.com

ensino, particularmente em geometria. E os(as) mesmos(as) não serão capazes de empregar tecnologias digitais em sala de aula se não forem instrumentalizados(as) em seus cursos de formação.

Uma das tecnologias digitais que pode ser empregada nas aulas de geometria é o GeoGebra [8, 10], um software gratuito de geometria dinâmica, de acesso remoto, e com um vasto repertório de atividades e materiais didáticos disponíveis em sua plataforma [9, 11, 21].

Desta forma, propomos neste trabalho duas atividades [14, 16] para desenvolver/aperfeiçoar as concepções espaciais com o GeoGebra 3D [12, 13, 19, 20]. As atividades exploram a duplicação do cubo e a releitura de imagens, e podem ser aplicadas nos cursos de geometria da Licenciatura em Matemática e da Educação Básica, nesta com algumas adaptações.

2 Duplicação do cubo

A duplicação do cubo, a trisseção do ângulo e a quadratura do círculo são problemas geométricos impossíveis de serem solucionados apenas com régua e compasso, até que a teoria de Galois (1811–1832), desenvolvida no século XIX, forneceu a prova matemática definitiva de sua impossibilidade. Entretanto, a busca pela solução desses problemas influenciou a geometria grega e fomentou diversas descobertas, tais como as seções cônicas, as curvas cúbicas e quárticas e diversas curvas transcendentes [7].

Para Eves ([7], p. 135), "há indícios de que o problema da duplicação do cubo possa ter se originado nas palavras de algum poeta (talvez Eurípedes) grego antigo, ignorante em matemática, ao descrever a insatisfação do mítico rei Minos com o tamanho do túmulo erguido para seu filho Glauco".

Diante desse fato, o rei Minos ordenou que o túmulo do seu filho Glauco fosse duplicado. Para tanto, por influência do poeta, o rei acreditou que bastaria duplicar as dimensões do túmulo, isto é, comprimento, largura e altura.

> Essa falha matemática da parte do poeta levou os geômetras a abraçar o problema de como dobrar um dado sólido mantendo-se sua forma. Nenhum progresso parece ter havido quanto à solução até que, algum tempo mais tarde, Hipócrates descobriu sua famosa redução [...] ([7], p. 135).

Após o dilema do rei Minos, a duplicação do cubo voltaria à tona com a construção do altar para o deus grego Apolo, considerado patrono da música e da arte, com poderes sobre a morte. Em seu templo, construído na ilha grega Delos, Apolo (ou deus do Sol) era venerado por aqueles(as) que desejavam suas previsões. A duplicação do altar de Apolo é relatada no Problema 2.1 segundo Contador [3]).

Problema 2.1. *Quando uma peste assolou Atenas, dizimando cerca de um quarto de sua população, inclusive fazendo Péricles uma de suas vítimas, os habitantes, desesperados, enviaram uma delegação em busca de auxílio para a ilha de Delos, mais precisamente ao templo de Apolo. Neste templo havia um altar em forma de cubo e, em troca do fim da peste, a divindade fez um pedido: erguei-me um altar igual ao dobro do já existente e a peste cessará.*

Segundo Domingues [6], Hipócrates de Quio (c. 440 a.C.) reduziu o problema da duplicação do cubo às médias proporcionais x e y aos segmentos de comprimento k e $2k$, ou seja:

$$\frac{k}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2k}. \tag{1}$$

Da proporção (1), segue que:

$$x^2 = ky \Rightarrow y = \frac{x^2}{k}; \tag{2}$$

$$y^2 = 2kx; \tag{3}$$

$$xy = 2k^2. \tag{4}$$

Substituindo (2) em (4), obtemos que:

$$x^3 = 2k^3;$$

$$x = \sqrt[3]{2}\,k. \tag{5}$$

Na relação (5), x é a medida da aresta do cubo duplicado enquanto que k é a medida da aresta do cubo original.

Após Hipócrates, outros matemáticos também tentaram solucionar o problema da duplicação do cubo, conforme a citação abaixo.

> Dessas, uma das mais antigas, e certamente uma das mais notáveis, na forma de uma solução por geometria superior, foi dada por Arquitas (c. 400 a.C.). Sua solução consiste em achar um ponto de intersecção de um cilindro circular reto, um toro de diâmetro interior zero e um cone circular reto! Essa solução lança alguma luz sobre a extensão pouco comum que a geometria deve ter atingido naqueles tempos remotos. A solução de Eudoxo (c. 370 a.C.) se perdeu. Menaecmo (c. 350 a.C.) deu duas soluções do problema e, tanto quanto se sabe, inventou as secções cônicas para esse propósito. Atribui-se a Eratóstenes (c. 230 a.C.) uma solução posterior usando dispositivos mecânicos e outra, por volta da mesma época, a Nicomedes. Uma solução ainda posterior foi oferecida por Apolônio (c. 225 a.C.). Dioclés (c. 180 a.C.) inventou uma curva chamada cissoide com o mesmo objetivo. E, obviamente, descobriram-se modernamente muitas soluções mediante curvas planas superiores ([7], p. 135).

O matemático Menaecmo (c. 350 a.C.), discípulo de Eudoxo, amigo de Platão (427 – 347 a.C.) e membro da Academia de Platão, "[...] fez a descoberta dessas curvas ($x^2 = ky$, $y^2 = 2kx$ e $xy = 2k^2$) por volta de 360 a.C. e mostrou que a interseção delas daria as médias requeridas no problema, ainda que não construídas com régua e compasso" ([5], p. 146). De acordo com Eves [7], são duas as contribuições de Menaecmo à solução do problema da duplicação do cubo.

1^a Empregam-se duas parábolas, com vértices comuns e eixos perpendiculares, tais que o *latus rectum* (lado reto)[4] de uma é o dobro do *latus rectum* da outra. Esta construção pode ser efetuada com o auxílio das equações (2) e (3), ou seja, $x^2 = ky$ e $y^2 = 2kx$, derivadas da proporção (1) de Hipócrates.

2^a Considera-se a interseção entre uma parábola e uma hipérbole equilátera que tem como assíntotas o eixo da parábola e a tangente a esta que passa pelo vértice. Esta construção pode ser efetuada com o auxílio das equações (2) e (4), ou seja, $x^2 = ky$ e $xy = 2k^2$, derivadas da proporção (1) de Hipócrates.

Atividade 2.1. *Com o GeoGebra 3D, duplicar o cubo de aresta k utilizando a primeira estratégia de Menaecmo.*

[4]O *latus rectum* de uma cônica é definido como sendo a corda focal, ou segmento de reta que passa por um dos focos da cônica e tem extremidades pertencentes à mesma, cujo comprimento é mínimo.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0505

Construímos no GeoGebra uma atividade dinâmica, cujo passo a passo está descrito em Oliveira [14, 15], que permite, atráves de um controle deslizante, alterar o valor da medida k e observar o que ocorre com as parábolas e os segmentos que definem as arestas do cubo e do cubo duplicado. Disponibilizamos essa atividade em `https://www.geogebra.org/calculator/uqpvcbmz`.

Usando o GeoGebra na opção de janela 3D, criamos um cubo de aresta k e outro cubo de aresta $\sqrt[3]{2}\,k$ – Figura 1. Assim, dados um cubo $\mathcal{C}$ de aresta k e um cubo $\mathcal{D}$ de aresta $\sqrt[3]{2}\,k$, temos que o volume $\mathcal{V}$ de $\mathcal{C}$ é $\mathcal{V}(\mathcal{C}) = k^3$ e o volume $\mathcal{V}$ de $\mathcal{D}$ é $\mathcal{V}(\mathcal{D}) = 2k^3$. Portanto: $\mathcal{V}(\mathcal{D}) = 2\mathcal{V}(\mathcal{C})$.

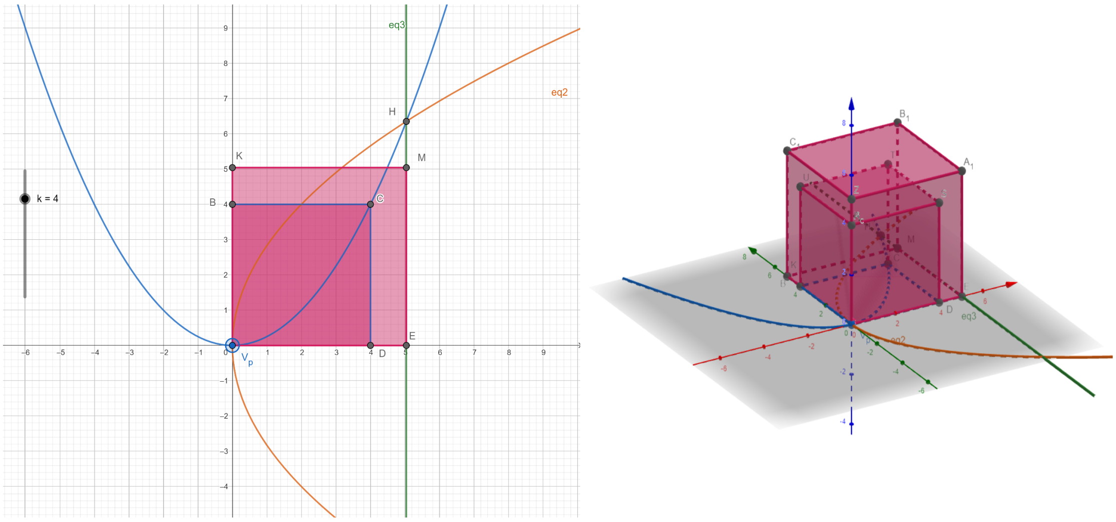


Figura 1: Cubos de arestas k e $\sqrt[3]{2}\,k$, com $k = 4$ [14].

No link `https://www.geogebra.org/classic/gmsk8jgv`, fornecemos uma atividade construída no GeoGebra que permite observar a duplicação do cubo alterando-se o valor de k no controle deslizante.

3 Releitura da fachada do Museu Oscar Niemeyer

Uma releitura é a ação de reinterpretar, acrescentando algo novo e original. A releitura de uma obra é a criação de uma nova obra, ressignificando a obra anterior. Na ressignificação, o autor da nova obra confere um toque pessoal à obra anterior.

De acordo com Daniel ([4], p. 16): "Fazer uma releitura de uma obra é expor a sua interpretação, sem fugir da ideia original. É recriar com novos elementos, mas que seja possível identificar que a obra original foi utilizada como inspiração".

Atividade 3.1. *Reinterpretar a fachada do Museu Oscar Niemeyer (MON) com o GeoGebra 3D.*

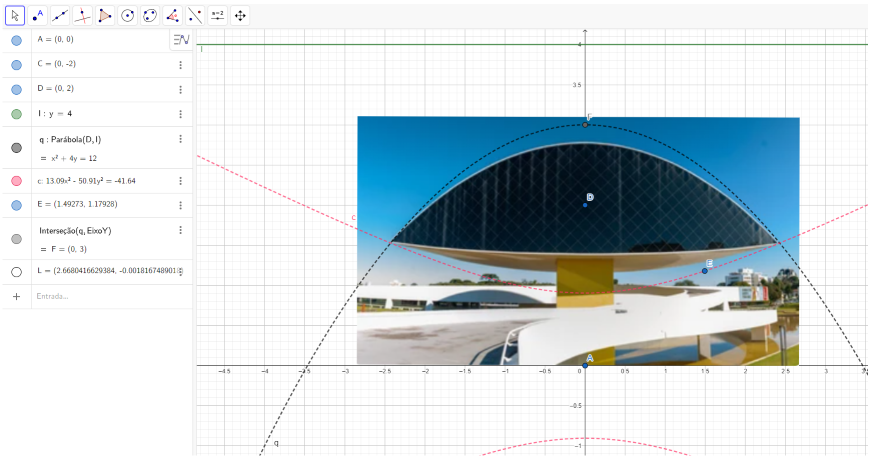
A autoria das adaptações e do anexo, popularmente denominado de olho - Figura 3(a), do Museu Oscar Niemeyer em Curitiba é do reconhecido arquiteto Oscar Niemeyer.

> Oscar Niemeyer, um dos maiores nomes da arquitetura moderna internacional, nasceu no Rio de Janeiro, em 15 de dezembro de 1907 e morreu em 5 de dezembro de 2012, aos 104 anos. Tem ao redor do mundo mais de 600 projetos arquitetônicos e é um dos representantes mais reconhecidos da arquitetura moderna. Foi o arquiteto designado para dar vida ao anexo do Olho e tornar o MON uma obra de arte por si só ([18], n.p).

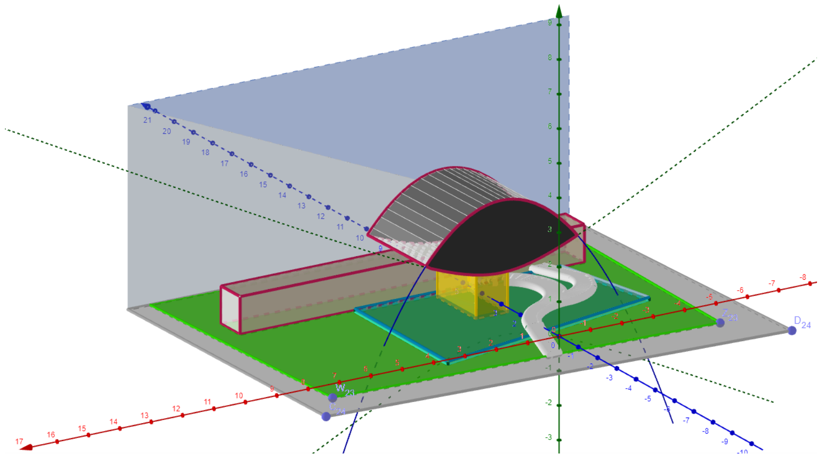
O MON é considerado atualmente o maior museu da América Latina, com aproximadamente 35 mil metros quadrados de área construída e cerca de 17 mil metros quadrados de área expositiva [18].

A reinterpretação da fachada do MON no GeoGebra 3D exige a construção de estruturas simples, tais como: planos que simulam o chão, o espelho d'água e o céu; prismas que representam a base do olho e o prédio principal. Contudo, há estruturas mais complexas, como o olho e a rampa de acesso.

Para modelar a estrutura do olho, empregamos uma parábola e uma hipérbole – Figura 2(a); para simular a rampa de acesso, utilizamos segmentos de reta e arcos de circunferência. A Figura 2(b) ilustra a construção final no GeoGebra 3D.



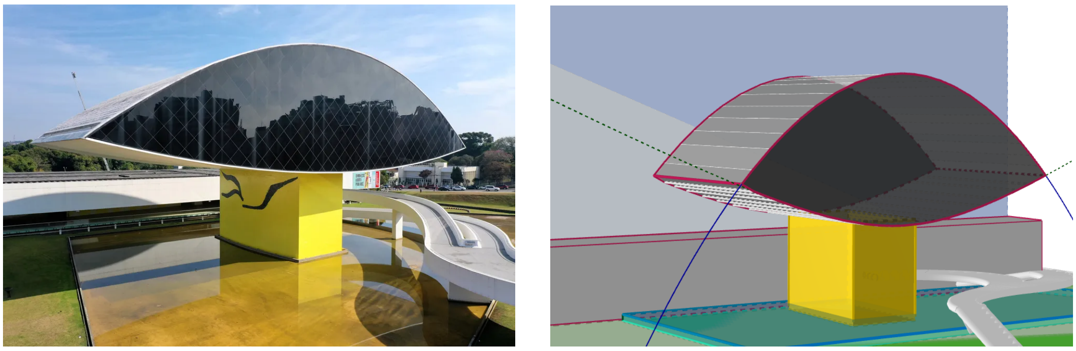
(a)



(b)

Figura 2: MON no GeoGebra 3D: (a) curvas para definir o formato do olho [16]; (b) estrutura final [14, 16].

O passo a passo da releitura do MON está descrito em Oliveira [14–16]. Uma visualização tridimensional 360° está disponível em https://www.geogebra.org/classic/yjpchesd. Finda a reinterpretação, podemos compará-la à obra original – Figura 3.



(a) (b)

Figura 3: MON: (a) fotografia [18]; (b) releitura no GeoGebra 3D [14].

4 Considerações Finais

Neste trabalho, propomos duas atividades para aplicar conceitos geométricos e aprimorar a concepção tridimensional. As atividades foram desenvolvidas com o GeoGebra 3D e abordam o problema geométrico clássico da duplicação do cubo e a releitura da fachada do Museu Oscar Niemeyer.

As atividades podem ser desenvolvidas na Licenciatura em Matemática e também na Educação Básica. Nesta, particularmente na reinterpretação da fachada do Museu Oscar Niemeyer, sugerimos que o(a) professor(a) de matemática empregue duas parábolas [16] ao invés de uma parábola e uma hipérbole.

Além de associar matemática, arte e história da matemática, almejamos que as atividades motivem professores(as) e estudantes a utilizar tecnologias digitais em sala de aula, colocando em prática dessa maneira o que preconizam a BNCC e o RCEMP.

Agradecimentos

A autora Katiane Souza de Oliveira agradece à UTFPR Campus Curitiba pela concessão de uma bolsa de estudos durante seis meses, período em que este trabalho foi parcialmente desenvolvido.

Referências

[1] Brasil. **BNCC (Base Nacional Comum Curricular)**. Online. Acessado em 17/01/2024, `http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf`.

[2] Brasil. **Parecer CNE/CES 1.302/2001**. Online. Acessado em 26/01/2024, `https://normativasconselhos.mec.gov.br/normativa/view/CNE_PAR_CNECESN1_22001.pdf?query=LICENCIATURA`.

[3] P. R. M. Contador. **Matemática, uma breve história**. 4a. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2023. ISBN: 978-8588325623.

[4] B. Daniel. "Aprendendo geometria por meio de releituras de obras de arte". Dissertação de mestrado. Universidade Regional de Blumenau, 2021.

[5] J. Delgado, K. Frensel e L. Crissaff. **Geometria analítica**. Coleção PROFMAT. SBM, 2017. ISBN: 9788583371212.

[6] H. H. Domingues. "Seções cônicas: história e ensino". Em: **Revista de Educação Matemática** 6(4) (1998), pp. 43–49.

[7] H. Eves. **Indrodução à história da matemática**. 5a. ed. Campinas: Unicamp, 2011. ISBN: 85-268-0657-2.

[8] GeoGebra. **Baixar aplicativos GeoGebra**. Online. Acessado em 23/01/2024, https://www.geogebra.org/download?lang=pt.

[9] GeoGebra. **Materiais didáticos**. Online. Acessado em 26/01/2024, https://www.geogebra.org/materials?lang=pt.

[10] GeoGebra. **O que é o GeoGebra?** Online. Acessado em 23/01/2024, https://www.geogebra.org/about.

[11] R. C. Lago e R. L. Nós. "Investigando teoremas de geometria plana com o GeoGebra". Em: **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo** 9(3) (2020), pp. 15–29. DOI: https://doi.org/10.23925/2020.v9i3p015-029.

[12] R. L. Nós e V. M. R. da Silva. "Radicais duplos no cálculo do volume de poliedros convexos". Em: **Revista Eletrônica Paulista de Matemática** 16 (2019), pp. 53–70. DOI: 10.21167/cqdvol16201923169664rlnvmrs5370.

[13] R. L. Nós et al. "Usando o GeoGebra para explorar lugares geométricos e construções tridimensionais". Em: **I Encontro Nacional do Mestrado Profmat**. 2023.

[14] K. S. de Oliveira. "Investigando problemas aritméticos, algébricos e geométricos com o GeoGebra e o GNU Octave". Dissertação de mestrado. UTFPR, Curitiba, 2023.

[15] K. S. de Oliveira, R. L. Nós e O. H. Saito. **Propostas de atividades para solucionar problemas aritméticos, algébricos e geométricos com o GNU Octave e o GeoGebra**. Online. Acessado em 02/02/2024, https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/741685.

[16] K. S. de Oliveira, R. L. Nós e O. H. Saito. "Usando o GeoGebra 3D para reinterpretar a fachada do Museu Oscar Niemeyer". Em: **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo** 13(2) (2024), pp. 113–129. DOI: https://doi.org/10.23925/2237-9657.2024.v13i2p113-129.

[17] Paraná. **Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná**. Online. Acessado em 17/01/2024, https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2021-08/referencial_curricular_novoem_11082021.pdf.

[18] Governo do Paraná. **História do museu Oscar Niemeyer**. Online. Acessado em 23/01/2024, https://www.museuoscarniemeyer.org.br/sobre/historia.

[19] V. M. R. da Silva e Nós. "Using GeoGebra 3D in the composition/decomposition of convex polyhedra for volume calculation". Em: **Journal of Engineering Research** 3(2) (2022), pp. 1–11. DOI: 10.22533/at.ed.3173222221210.

[20] V. M. R. da Silva e R. L. Nós. **Calculando o volume de poliedros convexos**. 1a. ed. Curitiba: CRV, 2018. ISBN: 978-85-444-2681-4.

[21] V. M. R. da Silva, R. L. Nós e M. Sano. "Uma visão dinâmica do teorema de Pitágoras via GeoGebra". Em: **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo** 12(1) (2023), pp. 62–77. DOI: https://doi.org/10.23925/2237-9657.2023.v12i1p062-077.

