

Modelagem Computacional e Análise de Configurações Periódicas de Autômatos Celulares na Classe I de Wolfram

Pouya Mehdipour¹ Paula T. M. Gibrim² Luiz C. A. Albuquerque³
UFV, Viçosa, MG

Resumo. Este trabalho visa apresentar autômatos celulares (ACs) unidimensionais. É desejável compreender o comportamento dos ACs durante uma combinação periódica de Regras de Wolfram na classe I para, assim, ser possível encontrar um padrão nesse comportamento. Foi desenvolvido um programa em Python capaz de modelar estes ACs unidimensionais, para facilitar a visualização e classificação dos resultados obtidos.

Palavras-chave. Dinâmica Simbólica, Autômatos Celulares, Classificação de Wolfram, Combinação Periódica de ACE, Autômatos Celulares Elementares.

1 Introdução

Os Autômatos Celulares (ACs) são um modelo formal simples para sistemas dinâmicos e utilizados em diversas áreas científicas, dentre elas: matemática, biologia, ciência da computação, ciências sociais e outras. Eles podem ser aplicados com diferentes finalidades, permitindo entender como a natureza, aparentemente fazendo o menor esforço, consegue criar coisas extremamente complexas[3]. Vale lembrar que, devido à sua grande variedade de comportamentos dinâmicos—inclusive, essa é uma das principais características que determinaram o sucesso em suas aplicações—os ACs podem ser aplicados em simulações de fenômenos naturais, geração de números pseudoaleatórios, processamento digital de imagens, criptografia etc.

Os primeiros estudos de ACs como sistemas dinâmicos foram feitos por Gustav Hedlund, Morton Curtis e Roger Lyndon em 1969[1]. Desde então, muitos trabalhos surgiram com aspectos relacionados à teoria de sistemas dinâmicos e, nas últimas décadas, os estudos sobre esses modelos cresceram significativamente, não apenas por serem de fácil construção ou por possibilitarem a criação de padrões consideravelmente complexos, mas também pela eficiência de sua computação, sobretudo se desenvolvida em arquitetura apropriada e exata, ou seja, sem aproximações. Entretanto, é válido destacar o trabalho de Stephen Wolfram que, ao publicar em 2002 o livro “A New Kind of Science”[3], inaugurou uma nova perspectiva no que diz respeito ao comportamento dos Autômatos Celulares e se consolidou como a principal referência desta área de pesquisa. Tais estudos têm sido fundamentais para o desenvolvimento da área.

Um *autômato celular* é uma quintupla da forma $C = (\mathcal{L}, \mathcal{S}, c_0, n, \mathcal{R})$ em que:

- *Grade de Células:* é um conjunto de células de tamanho $\mathcal{L} \in \mathbb{N}$
- *Conjunto de Estados:* \mathcal{S} é um conjunto finito de estados
- *Configuração Inicial:* c_0 é uma associação específica dos estados nas células de uma grade de células

¹pouya@ufv.br

²paula.gibrim@ufv.br

³lcaa@ufv.br

- *Vizinhança*: \mathcal{N} é um conjunto das células adjacentes a uma célula. Define-se uma métrica $d : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{N}$ onde $d(a, b) = |b - a| = n$ e a e b referem-se à posição dessas células. Sendo assim, a vizinhança seria a bola $B_n(a)$ de centro a e raio n
- *Regra Local*: \mathcal{R} é uma aplicação $\mathcal{R} : \mathcal{S}^{2n+1} \rightarrow \mathcal{S}$ onde n representa o raio da vizinhança

A *configuração* c de um autômato celular é uma aplicação $c : \mathbb{N}^d \rightarrow \mathcal{S}$ que especifica o estado de cada célula de uma grade de células e onde d representa a dimensão. O conjunto de todas as possíveis configurações de uma grade é representado por \mathcal{C} . Se c for uma função constante, o que levaria todas as células a um mesmo estado, a configuração é chamada de *configuração trivial*. As regras locais aplicadas nas vizinhanças de uma célula levam-nos até um sistema dinâmico que foi chamado de *função de transição global* $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, onde $G(c) = e$ é uma nova configuração em \mathcal{C} . Os ACs nos quais $d = 1$, $n = 1$ e $|\mathcal{S}| = 2$ são chamados de *Autômatos Celulares Elementares (ACE)*. Durante este trabalho, foram estudados os 256 modelos elementares (famosos por ACEs de Wolfram), de forma que os estados de valor 0 correspondem às células brancas e 1, às pretas[1]. Wolfram percebeu que os comportamentos das evoluções dessas 256 regras poderiam ser agrupados em quatro classes diferentes: classe I (homogênea), II (periódica), III (caótica) e IV (complexa), como ilustrado na Figura 1 e detalhado na Tabela 1.

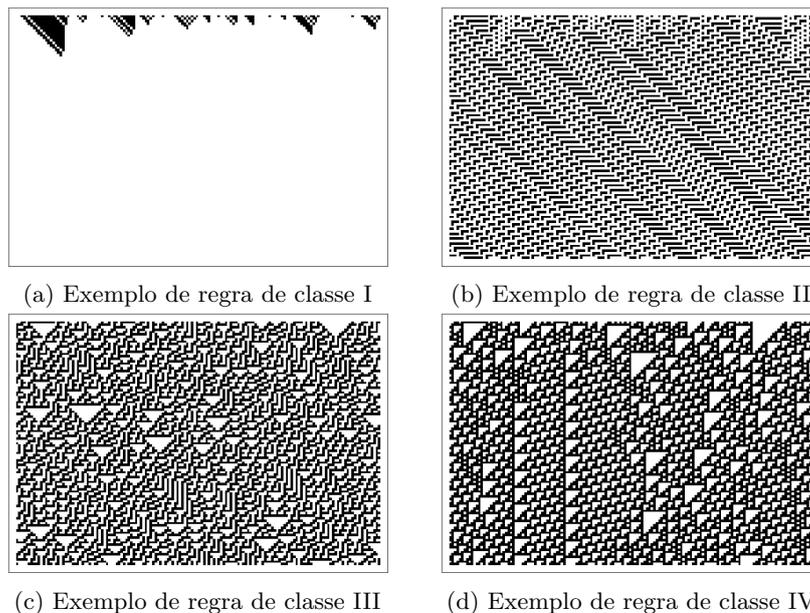


Figura 1: Exemplo de regras em diferentes classes definidas por Stephen Wolfram. Fonte: Autores.

Sejam G_1 e G_2 duas funções de transição global com as respectivas regras locais \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 de ACEs dadas com o mesmo conjunto de estados. A composição $G_1 \circ G_2$ também é uma função de transição global. Pode-se definir uma *configuração periódica de ACEs* com período q , quando existem q regras locais $\mathcal{R}_1(x), \dots, \mathcal{R}_q(x)$ tais que existem q funções de transições globais $\overline{G}_1, \dots, \overline{G}_q$ associadas às seguintes regras: \overline{G}_1 a $R_1(x)$, \overline{G}_2 a $R_2 \circ R_1(x)$, \dots , \overline{G}_q a $R_q \circ \dots \circ R_1(x)$. Neste trabalho, foi estudado *configuração periódica de ACEs* de período 2, que contém duas funções de transições globais $\overline{G}_1, \overline{G}_2$, respectivamente associadas a $R_1(x)$ e $R_2 \circ R_1(x)$, onde $R_1(x), R_2(x)$ pertencem à Classe I de Wolfram.

Tabela 1: Tabela de classificação das Regras de Wolfram[2].

Classes	Regras
I	0, 8, 32, 40, 64, 96, 128, 136, 160, 168, 192, 224, 234, 235, 238, 239, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255
II	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 59, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 87, 88, 91, 92, 93, 94, 95, 98, 99, 100, 103, 104, 108, 109, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 123, 125, 127, 130, 131, 132, 133, 134, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 148, 152, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 162, 163, 164, 166, 167, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 194, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 236, 237, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247
III	18, 22, 30, 45, 60, 75, 86, 89, 90, 101, 102, 105, 122, 126, 129, 135, 146, 149, 150, 151, 153, 161, 165, 182, 183, 195
IV	41, 54, 97, 106, 107, 110, 120, 121, 124, 137, 147, 169, 193, 225

2 Metodologia

A primeira fase da pesquisa consistiu no estudo e compreensão dos conceitos teóricos, enquanto a segunda consistiu no desenvolvimento do código computacional utilizado para gerar todas as imagens utilizadas nesse projeto. Conforme citado anteriormente, o código foi escrito na linguagem Python, fazendo-se necessário o uso das bibliotecas Numpy, Pillow e Matplotlib. A implementação foi separada em alguns arquivos que serão detalhados a seguir:

- *rules.py* – Responsável por conter o algoritmo das 256 regras de Wolfram, sendo cada uma delas representada por uma função. Como parâmetro, é passado um arranjo de tamanho 3 que corresponde às células que serão utilizadas na aplicação da regra local. Como resultado, a função retorna o valor da célula imediatamente abaixo da célula central
- *utils.py* – Responsável por conter todas as funções extras da aplicação. É neste arquivo que se encontra a função responsável por aplicar uma regra em uma grade de células, a responsável por aplicar uma combinação periódica, ou mesmo, a responsável por transformar o arranjo final em imagem. Além disso, também são definidas funções que geram todas as imagens das regras individualmente aplicadas, bem como das possíveis combinações periódicas. Também, neste arquivo, foram definidas algumas funções responsáveis por criar imagens auxiliares para os estudos, das quais podem-se citar as que têm por objetivo criar mosaicos com vários exemplos de uma mesma combinação periódica de regras, a fim de facilitar a comparação nas análises
- *main.py* – Responsável por fazer a chamada das principais funções definidas em *utils.py*. Quando executado, é criada uma nova pasta chamada *WolframRules_Imgs/* no mesmo diretório no qual se encontra o diretório pai e esta nova pasta contém imagens de autômatos celulares de configurações iniciais aleatórias. Estas imagens, devidamente separadas em subpastas, provêm de aplicações de todas as regras individuais, configurações periódicas nas

quais suas regras locais são um arranjo combinatório de todas as regras de Wolfram, tomadas duas a duas, e mosaicos que possuem a mesma configuração periódica sendo aplicada em várias configurações iniciais diferentes

Por fim, as terceira e última fases consistiram em uma análise mais detalhada dos resultados obtidos. Foi necessário comparar minuciosamente as imagens geradas, a fim de classificá-las em uma das quatro classes de Wolfram.

3 Resultados

No estudo inicial das configurações periódicas de duas regras, foram considerados autômatos celulares $C = (\mathcal{L}, \mathcal{S}, c, n, \mathcal{R})$ com as seguintes características: $\mathcal{L} = 150$, $\mathcal{S} = \{0, 1\}$, c aleatório (sendo escolhida uma amostra de 20 configurações diferentes), $n = 1$ e \mathcal{R} sendo uma combinação na qual suas regras locais são um arranjo das regras de Wolfram pertencentes à Classe I, tomadas duas a duas.

Tabela 2: Tabela de configurações de regras de Classe I com I e que levam à Classe I.

Configurações periódicas em Classe I de Wolfram							
0+8	8+192	40+192	128+136	160+248	224+254	238+249	249+253
0+32	8+224	40+224	128+160	160+252	224+255	238+250	249+254
0+40	8+234	40+234	128+168	160+253	234+235	238+251	249+255
0+64	8+248	40+248	128+192	160+255	234+238	238+252	250+251
0+96	8+250	64+96	128+224	168+192	234+239	238+253	250+252
0+128	32+40	64+128	128+234	168+224	234+248	238+254	250+253
0+136	32+64	64+136	128+238	168+235	234+249	238+255	250+254
0+160	32+96	64+168	128+248	168+239	234+250	239+248	250+255
0+168	32+128	64+168	128+251	168+249	234+251	239+249	251+252
0+192	32+136	64+192	128+252	168+250	234+252	239+250	251+253
0+224	31+160	64+224	128+255	168+251	234+253	239+251	251+254
0+234	32+168	64+234	136+160	168+253	234+254	239+252	251+255
0+238	32+192	64+238	136+168	168+254	234+255	239+253	252+253
0+248	32+224	64+248	136+192	168+255	235+238	239+254	252+254
0+250	32+234	64+251	136+224	192+224	235+239	239+255	252+255
0+252	32+238	64+252	136+250	192+250	235+248	248+249	253+254
0+254	32+248	64+255	136+251	192+251	235+249	248+250	253+255
8+32	32+252	96+128	136+254	192+254	235+250	248+251	254+255
8+40	32+254	96+136	136+255	192+255	235+251	248+252	
8+64	40+64	96+160	160+168	224+235	235+252	248+253	
8+96	40+96	96+168	160+192	224+239	235+253	248+254	
8+128	40+128	96+192	160+224	224+249	235+254	248+255	
8+136	40+136	92+224	160+234	224+250	235+255	249+250	
8+160	40+160	96+234	160+238	224+251	238+239	249+251	
8+168	40+168	96+248	160+239	224+253	238+248	249+252	

Ao efetuar a composição de todas as regras da Classe I⁴, pode-se observar que muitas delas continuavam a levar para uma classe homogênea, conforme apresentado na Tabela 2. Alguns exemplos de configurações periódicas são ilustrados nas imagens da Figura 2.

⁴As das imagens obtidas, bem como o código-fonte, podem ser disponibilizadas aos pesquisadores, basta solicitar por e-mail a um dos autores.

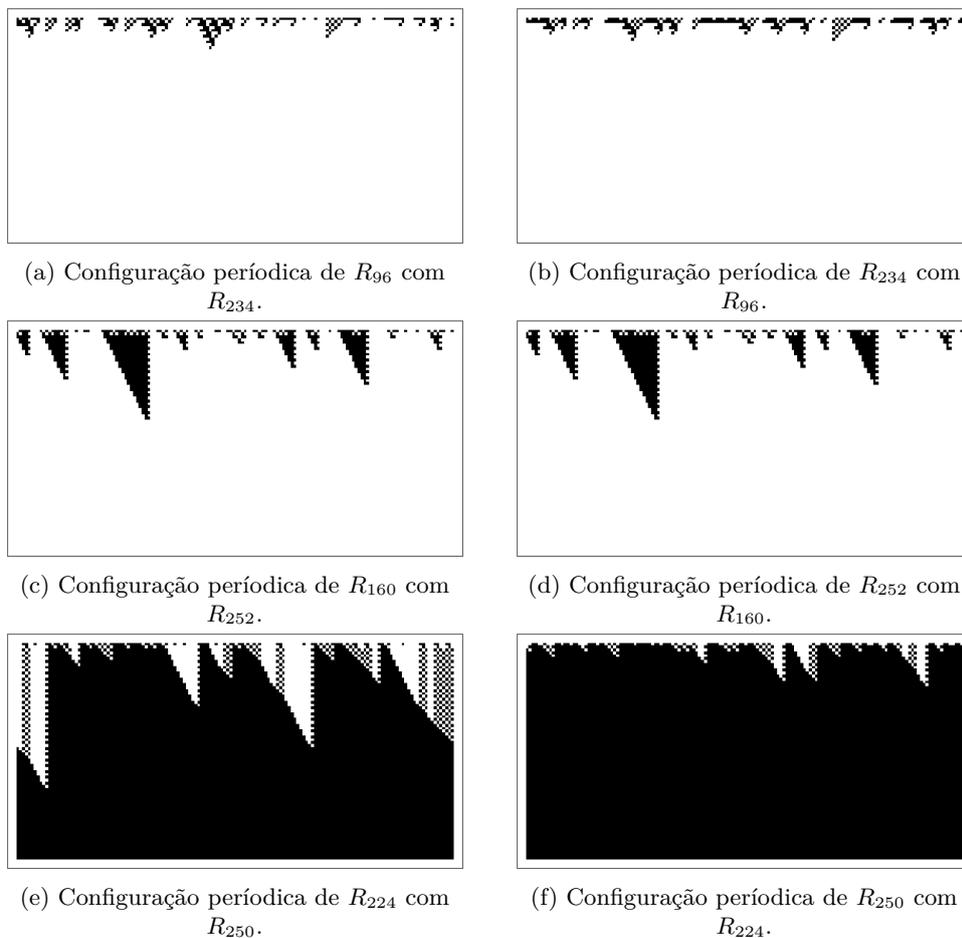


Figura 2: Configurações periódicas entre regras selecionadas que geram resultados de classe I. Fonte: Autores.

Todavia, algumas das configurações periódicas não pertenciam à classe homogênea (I), mas sim à periódica (II). A lista destes casos é apresentada na Tabela 3 e alguns exemplos dessas configurações são ilustrados nas imagens da Figura 3.

Diante destas observações, foi definido, como resultado principal, o seguinte teorema:

Theorem 3.1. Todas as configurações periódicas de ACEs de Classe I com Classe I de Wolfram pertencem à classe homogênea (Classe I) ou à classe periódica (Classe II), conforme listadas nas Tabelas 2 e 3.

Tabela 3: Tabela de configurações de regras periódicas de Classe I com I e que levam à Classe II.

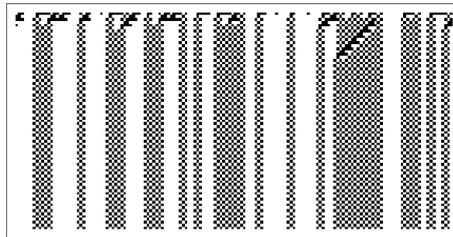
Configurações periódicas em Classe II de Wolfram							
0+235	8+252	40+235	64+239	96+252	136+234	160+254	192+252
0+239	8+253	40+238	64+249	96+253	136+238	168+234	192+253
0+249	8+254	40+239	64+250	96+254	136+239	168+238	224+234
0+251	8+255	40+249	64+253	96+255	136+248	168+248	224+238
0+253	32+235	40+250	64+254	128+235	136+249	168+252	224+248
0+255	32+239	40+251	96+235	128+239	136+252	192+234	224+252
8+235	32+249	40+252	96+238	128+249	136+253	192+235	
8+238	32+250	40+253	96+239	128+250	160+235	192+238	
8+239	32+251	40+254	96+246	128+253	160+249	192+239	
8+249	32+253	40+255	96+250	128+254	160+250	192+248	
8+251	32+255	64+235	96+251	136+234	160+251	192+249	



(g) Configuração periódica de R_{96} com R_{235} .



(h) Configuração periódica de R_{235} com R_{96} .



(i) Configuração periódica de R_{40} com R_{250} .



(j) Configuração periódica de R_{250} com R_{40} .

Figura 3: Combinações periódicas entre regras selecionadas que geram resultados de classe II. Fonte: Autores.

Agradecimentos

Agradecemos à FAPEMIG pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] J. Kari. “Theory of cellular automata: a survey”. Em: **Theoretical Computer Science** 334 (2005), pp. 3–33. DOI: [10.1016/j.tcs.2004.11.021](https://doi.org/10.1016/j.tcs.2004.11.021).
- [2] G. J. Martinez. “A note on elementary cellular automata classification”. Em: **Journal of Cellular Automata** 8 (2013), pp. 233–259.

- [3] S. Wolfram. **A new kind of science**. Wolfram Media. 2002. Online. Acessado em 09/04/2023, <https://www.wolframscience.com/nks/>.