

Proposta Preliminar de uma Nova Aceleração para o Método das Potências

Wesliane Maia do Amaral¹, Ivan Mezzomo², Matheus S. Menezes³, Stefeson B. de Melo⁴, Rosilda S. Santos⁵, Jocivania Pinheiro⁶

CCEN/UFERSA, Mossoró, RN

Modesto V. M. Lopes⁷

PPGEM/USP, São Paulo, SP

O Método das Potências é utilizado para determinar o maior autovalor e seu autovetor associado de uma matriz quadrada de ordem n , sem a necessidade de se determinar o polinômio característico e possui inúmeras aplicações práticas. Entretanto, com o avanço do processamento computacional surgem problemas mais complexos atrelados a altas ordens de matrizes. Consequentemente, torna-se indispensável a utilização de artifícios e outros modelos matemáticos que auxiliem o Método das Potências (MP) aproximarem-se das soluções de forma mais rápida e eficaz.

Modelos como a Aceleração de Aitken e o Método das Potências com Deslocamento são bastante utilizados para acelerar a convergência do MP, porém estes modelos apresentam algumas restrições e geralmente aceleram as soluções em tipos específicos de matrizes [1]. Em [2] realizamos um estudo em relação ao número de iterações para estimar qual a função de aproximação do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) melhor se ajusta a uma quantidade inicial de soluções aproximadas, na tentativa de encontrar o autovalor dominante dos problemas propostos.

O objetivo principal deste trabalho é fazer um estudo preliminar de uma nova aceleração para o MP baseado no MMQ, usando a função de aproximação polinomial de segundo grau, conforme resultados obtidos em [2]. Além disso, faremos uma análise comparativa com o MP levando em consideração o número de iterações e o erro absoluto.

Após um número pré determinado de iteração do MP, será utilizado o MMQ na qual será realizado a implementação da função de aproximação polinomial, com o intuito de averiguar se haverá uma melhora na aproximação do autovalor dominante em relação ao MP.

Teorema 1 [Método das Potências (MP)][3]: *Dado uma matriz real quadrada A de ordem n e seus autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ com seus correspondentes autovetores u_1, u_2, \dots, u_n . Suponha que os autovetores são linearmente independentes e que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. A sequência y_k definida por*

$$y_{k+1} = Ay_k \quad (1)$$

com $k = 1, 2, \dots$, onde y_0 é um vetor arbitrário que permite a expansão $y_0 = \sum_{j=1}^n c_j u_j$, com c_j escalares quaisquer e $c_1 \neq 0$, então $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(y_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lambda_1$, onde r indica a r -ésima componente.

Além disso, quando $k \rightarrow \infty$, y_k tende ao autovetor correspondente a λ_1 . Quanto maior for $|\lambda_1|$ quando comparado com $|\lambda_2|$, mais rápida será a convergência.

¹weslianemaia1@gmail.com

²imezzomo@ufersa.edu.br

³matheus@ufersa.edu.br

⁴stefeson@ufersa.edu.br

⁵rosilda.santos@ufersa.edu.br

⁶vaniamat@ufersa.edu.br

⁷modsva@usp.br

De acordo com [3], no caso discreto, o objetivo do MMQ é aproximar um conjunto de n pontos distintos por uma função de aproximação $F(x)$, de tal modo que o quadrado das distâncias deste conjunto de pontos em relação a $F(x)$ seja a menor possível.

As matrizes utilizadas neste trabalho foram obtidas através do repositório Florida Sparse Matrix Collection. Visando analisar a funcionalidade do algoritmo proposto, efetuamos a implementação dos métodos no MatLab2014a em uma máquina com processador Intel Core i5, 4GB de RAM e sistema operacional Windows 10. Como critério de parada, usamos o teste do erro absoluto para cada componente de λ_1 dada por $|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}|_r < \epsilon$, com precisão 10^{-3} ou 10.000 iterações. Na tabela abaixo, os dados da coluna eficiência se referem ao percentual de eficiência da aceleração proposta neste trabalho em relação ao MP. O tempo de processamento não foi levado em consideração por ter sido extremamente pequeno. A análise se deu através da comparação entre o número de iterações, conforme Tabela 1.

Tabela 1: Resultado dos experimentos realizados

Problema	Ordem	MP		MMQ		Erro Absoluto	Eficiência
		Autovalor	Iter.	Autovalor	Iter.		
tomography	500	3.79×10^7	166	3.80×10^7	59	9.03×10^{-4}	+ 64.46%
pde900	900	9.9335	2.096	9.93	781	3.54×10^{-4}	+ 62.74%
besstk09	1083	6.76×10^7	1171	6.76×10^7	417	2.35×10^{-4}	+ 59.78%
zenios	2873	3.3377	6	3.3377	3	5.73×10^{-4}	+ 50%
besstk23	3134	2.26×10^{16}	76	3.26×10^{16}	51	2.04×10^{-4}	+ 32.90%
pkustk02	10800	105.7802	11	105.7856	4	5.10×10^{-5}	+ 63.64%
pkustk01	22044	64.3209	87	64.3256	85	7.32×10^{-5}	+ 2.30%
bcsstk23	46772	1.34×10^9	2954	1.34×10^9	1048	6.68×10^{-4}	+ 64.42%

Analisando os resultados da Tabela 1, podemos perceber que a aceleração proposta para o MP utilizando o MMQ, foi capaz de acelerar o processo de aproximação do resultado em todas as matrizes analisadas. Com exceção da matriz pkustk01, que teve uma eficiência de 2.30%, e da matriz besstk23 que teve 32.90%, a aceleração usando o MMQ teve uma eficiência superior a 50% em todas as outras matrizes em relação ao MP. Portanto, podemos afirmar com base nos testes acima, que a aceleração é eficiente para as matrizes estudadas. Em trabalhos futuros, pretendemos aumentar expressivamente o número de matrizes estudadas, fazer um estudo comparativo com as acelerações do MP mais utilizados na literatura (Aceleração de Aitken e MP com deslocamento) e também refinar a estratégia do uso do MMQ.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da UFERSA e do CNPq na execução deste trabalho.

Referências

- [1] M. V. Lopes, H. S. Silva, I. Mezzomo, M. S. Menezes e S. B. Melo. “Estudo do Método das Potências e Método das Potências com Aceleração de Aitken”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics** 6 (2018), pp. 010135-1 –010135-2.
- [2] M. V. Lopes, H. S. Silva, I. Mezzomo, M. S. Menezes e S. B. Melo. “Estudo Preliminar da Utilização do Método dos Mínimos Quadrados no Método das Potências”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics** 9.1 (2022), pp. 010086-1 –010086-2.
- [3] N. B. franco. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.