Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Estabilidade via funções de Lyapunov em modelos SIR Estocásticos

Elias O. V. Santos[1]
Mestrando no PosMAC, FC/Unesp, Bauru SP
Fabiano B. Silva[2]
Departamento de Matemática, FC/Unesp, Bauru, SP

Pode-se definir a epidemiologia como a ciência que estuda as causas, a evolução e a distribuição de doenças em populações. Na epidemiologia matemática, doenças infecciosas são modeladas com o objetivo de buscar melhores estratégias de prevenção e controle, bem como auxiliar governos e agentes de saúde na tomada de decisão. Desse modo, os modelos matemáticos são importantes ferramentas para realizar a análise da propagação e controle de doenças infecciosas (como apresentado em [1]).

É uma estratégia usual na modelagem, considerar inicialmente o modelo mais simples possível, mesmo que algumas características de contágio não sejam levadas em conta. Desse modo, embora simples, o modelo SIR, introduzido em [2], é um modelo compartimental que divide a população nos estados de (S)uscetíveis, (I)nfectados e (R)emovidos (que contém os que se recuperaram e os que, infelizmente, faleceram), tem sido usado amplamente no estudo de diversas doenças, inclusive, da Covid-19.

Trata-se de um trabalho teórico, de uma pesquisa mestrado que encontra-se em andamento, em que após um estudo detalhado das obras presentes nas referências, procurou-se entender como é utilizado o modelo SIR determinístico para modelagem de epidemias, bem como modelos SIR Estocásticos com uso de Equações Diferenciais Estocásticas (EDEs), que fornecem uma importante abordagem para o estudo de fenômenos naturais, utilizando-se de distribuições de probabilidade de modo a ser possível gerar conclusões que não seriam possíveis com uma modelagem determinística (maiores detalhes, podem ser vistos em [3]).

Consideremos o seguinte modelo SIR determinístico:

$$
\begin{aligned}
S'(t) &= -\beta S(t)I(t) - \mu S(t) + \mu; \\
I'(t) &= \beta S(t)I(t) - (\lambda + \mu)I(t); \\
R'(t) &= \lambda I(t) - \mu R(t).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Onde, na Equação (1), $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ denotam o número de indivíduos Suscetíveis à doença, de membros Infectados e de membros que foram afastados da possibilidade de infecção por imunidade total (Removidos), respectivamente. A população considerada tem tamanho constante N, e as variáveis são normalizadas para N=1, ou seja $S(t)+I(t)+R(t) = 1$ para todo $t \geq 0$. A constante $\mu$ representa a taxa de natalidade e mortalidade; além disso, todos os recém-nascidos são suscetíveis; a constante $\lambda$ representa a taxa de recuperação de pessoas infectadas; a constante $\beta$ é o número médio de contatos por infectante por dia. Obviamente, temos $\mu, \lambda, \beta \in R_+$.

É possível introduzir um ruído nas Equações (1), transformando o problema determinístico em um problema estocástico. O ruído pode induzir efeitos não triviais em sistemas físicos e biológicos.

[1]elias.ov.santos@unesp.br
[2]fabiano.borges@unesp.br

 

A presença de uma fonte de ruído de fato pode modificar o comportamento da evolução determinística correspondente do sistema. Dessa forma, temos o seguinte modelo SIR estocástico, como apresentado em [4]:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S(t) &= (-\beta S(t)I(t) - \mu S(t) + \mu)\mathrm{d}t - \sigma S(t)I(t)\mathrm{d}W(t);\\
\mathrm{d}I(t) &= (\beta S(t)I(t) - (\lambda+\mu)I(t))\mathrm{d}t + \sigma S(t)I(t)\mathrm{d}W(t);\\
\mathrm{d}R(t) &= (\lambda I(t) - \mu R(t))\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{2}$$

Onde $\sigma$ é uma constante positiva e $W$ é um processo real de Wiener definido em base estocástica $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P}\right)$.

Se usarmos a seguinte função de Lyapunov:

$$V(u) = u_1^2 + \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2} u_2^2 + \frac{\mu}{\lambda} u_3^2, \tag{3}$$

onde $u = (u_1, u_2, u_3)$, então vale o seguinte resultado para estabilidade estocástica no sistema (2):

Se a condição $0 < \beta < \min\left\{\lambda + \mu - \frac{\sigma^2}{2}, 2\mu\right\}$ se mantém, então o equilíbrio livre de doença $E_0 = (1, 0, 0)$ de (2) é globalmente assintoticamente estável [4, p.113].

A partir de simulações computacionais com programação Python, pretende-se verificar que a estabilidade via funções de Lyapunov do modelo matemático SIR Estocástico estudado, é confirmado pelas simulações numéricas. Ademais, pretende-se trabalhar com um modelo compartimental utilizado para Covid-19, derivado do SIR, como o modelo SIRD, apresentado em [5], que acrescenta o compartimento (D)eceased para os indivíduos falecidos; de modo que pretende-se apresentar um modelo estocástico para o sistema SIRD.

## Agradecimentos

Agradecemos à FAPESP pelo fomento à nossa pesquisa. Processo nº 2021/11857-6.

## Referências

[1] M. L. Almeida. "Modelagem epidemiológica com um modelo SIR estocástico utilizando Cadeia de Markov de tempo contínuo". Dissertação de mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, UFRJ, 2020.

[2] W. O. Kermack e A. G. Mckendrick. "A contribution to the mathematical theory of epidemics". Em: **The Royal Society** 115 (1927), pp. 700–721. DOI: `10.1098/rspa.1927.0118`.

[3] L. J. S. Allen. **An introduction to stochastic processes with applications to biology**. 2a. ed. Boca Raton: CRC press, 2010. ISBN: 9781439894682.

[4] E. Tornatore, S. M. Buccellato e P. Vetro. "Stability of a stochastic SIR system". Em: **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications** 354 (2005), pp. 111–126. DOI: `10.1016/j.physa.2005.02.057`.

[5] F. Amaral, W. Casaca, C. M. Oishi e J. A. Cuminato. "Towards providing effective data-driven responses to predict the Covid-19 in São Paulo and Brazil". Em: **Sensors** 21 (2021), p. 540. DOI: `10.3390/s21020540`.

 