Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Variedades invariantes hiperbólicas e controle no Problema Restrito de Três Corpos

Priscilla A. de Sousa-Silva[1], Luiz A. dePaula[2]
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Faculdade de Engenharia - Câmpus de São João da Boa Vista
São João da Boa Vista, SP, Brasil

Variedades invariantes hiperbólicas são as estruturas subjacentes que organizam regiões caóticas no espaço de fase e determinam os canais de transporte induzidos por órbitas periódicas no mar caótico [1–3]. Essas estruturas permitem caracterizar o transporte caótico e desempenham um papel importante na obtenção de mecanismos de controle de caos, tendo aplicações práticas, por exemplo, na manutenção de órbitas de estacionamento de espaçonaves cujos projetos de missão se utilizam de trajetórias em torno dos pontos de equilíbrio no Problema Restrito de Três Corpos (PRTC) [4, 5]. Neste trabalho, investigamos esquemas de controle aplicados a mapas de Poincaré do PRTC visando estabilizar trajetórias em torno dos pontos de equilíbrio do sistema Terra-Lua.

O PRTC descreve o movimento de um corpo de massa desprezível sob ação da atração gravitacional de dois corpos massivos P_1 e P_2 de massas m_1 e m_2, chamados de primários, que descrevem órbitas circulares em torno do centro de massa do sistema P_1-P_2 [6]. Em um referencial com origem no centro de massa que gira com a mesma velocidade angular dos primários e unidades de distancia normalizadas pela distância entre os primários, as equações de movimento do corpo são:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y, \\ \ddot{z} &= \Omega_z, \end{aligned} \tag{1}$$

onde x, y e z são as coordenadas do corpo de massa infinitesimal; Ω_x, Ω_y e Ω_z denotam as derivadas parciais do potencial efetivo Ω com respeito à x, y e z, respectivamente; e Ω é dado por:

$$\Omega(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1-\mu)}{2}, \tag{2}$$

e $r_1^2 = (x-\mu)^2 + y^2 + z^2$ e $r_2^2 = (x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2$ são, respectivamente, os quadrados das distâncias do terceiro corpo à P_1 e P_2 localizados em $(\mu, 0, 0)$ e $(\mu - 1, 0, 0)$, com o parâmetro de massa dado por $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$.

O sistema de equações (1) tem uma integral primeira chamada de integral de Jacobi, dada por:

$$J(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 2\Omega(x, y, z) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = C, \tag{3}$$

com C chamada de constante de Jacobi. O sistema de equações (1) têm cinco pontos de equilíbrio, também chamados de pontos de libração. Três deles, L_1, L_2, e L_3, localizam-se ao longo do eixo x-axis de acordo com a seguinte convenção: L_1 entre os primários, L_2 à esquerda de P_2, e L_3 à direita de P_1. Os outros dois pontos de equilíbrio localizam-se no plano $z = 0$ nos vértices

[1] priscilla.silva@unesp.br
[2] la.paula@unesp.br

de triângulos equiláteros formados com os primários com coordenadas $(\mu - 1/2, -\sqrt{3}/2, 0)$ para L_4 e $(\mu - 1/2, \sqrt{3}/2, 0)$ para L_5. Os valores da constante Jacobi nas soluções de equilíbrio são denotados por C_k, k = 1,2,3,4,5. Para um dado μ, os valores de energia associados a C_k definem as cinco configurações possíveis de regiões de Hill, que correspondem a diferentes possibilidades de transporte no espaço de fase.

Uma variedade de estratégias pode ser aplicada para obter a manutenção de órbita em torno dos equilíbrios Lagrangeanos. Uma delas, chamada de Estratégia de Continuação Ótima (OCS) consiste em manter a espaçonave nas proximidades de uma órbita em torno de um ponto de libração entre 1 e 2 revoluções [7, 8]. Para isso, a OCS computa as manobras de forma que a espaçonave satisfaça um conjunto de restrições definidas pelo usuário em cruzamentos sucessivos do plano x-z, expressas em termos da posição x ou velocidade $\dot{x}$. A OCS é formulada como um problema de valor de contorno de dois pontos que pode ser resolvido usando qualquer esquema de correção diferencial apropriado. Também pode-se incorporar um esquema de otimização não linear, como a programação quadrática sequencial [9], para obter manobras de manutenção localmente ótimas.

Agradecimentos

Ao CNPq (Processo 422282/2018-9), à FAPESP (Processo 2018/25001-3) e à FINEP (Projeto 0527/18). À CAPES – Código de Financiamento 001.

Referências

[1] Kathleen T. Alligood, Tim Sauer e James Yorke. **Chaos: An Introduction to Dynamical Systems**. New York: Springer, 1996.

[2] G. Gómez, W.S. Koon, M.W. Lo, J.E. Marsden, J. Masdemont e S.D. Ross. "Connecting orbits and invariant manifolds in the spatial restricted three-body problem". Em: **Nonlinearity** 17 (2004), pp. 1571–1606.

[3] W.S. Koon, M.W. Lo, J.E. Marsden e S.D. Ross. **Dynamical Systems, The Three-Body Problem, And Space Mission Design**. Springer-Verlag, 2006.

[4] David C. Folta, Thomas A. Pavlak, Amanda F. Haapala, Kathleen C. Howell e Mark A. Woodard. "Earth–Moon libration point orbit stationkeeping: Theory, modeling, and operations". Em: **Acta Astronautica** 94.1 (2014), pp. 421–433.

[5] Judit Sliz, A. Suli e Tamas Kovacs. "Control of chaos in the vicinity of the Earth–Moon L5 Lagrangian point to keep a spacecraft in orbit". Em: **Astronomische Nachrichten** 336.1 (2015).

[6] V. Szebehely. **Theory of Orbits**. Academic Press, 1967.

[7] D. Folta, M. Woodard e D. Cosgrove. "Stationkeeping of the first Earth–Moon libration orbiters: the ARTEMIS mission". Em: **Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Girdwood, Alaska, July 2011**. Paper No. 11-515. AAS, 2011.

[8] D. Folta, T. Pavlak, K. Howell, M. Woodard e D. Woodfork. "Stationkeeping of lissajous trajectories in the Earth–Moon system with applications to ARTEMIS". Em: **Proceedings of the 20th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, San Diego, California, February 2010**. Paper No. 10-113. AAS, 2010.

[9] Joseph-Frédéric Bonnans, Jean Charles Gilbert, Claude Lemarechal e Claudia A. Sagastizábal. **Numerical Optimization: Theoretical and Practical Aspects**. 2ª ed. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006, p. 494. ISBN: 978-3-540-35447-5. DOI: 10.1007/978-3-540-35447-5.

