Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Códigos perfeitos na métrica ℓ_p

Roberta Alves do Nascimento Ribeiro[1] Grasiele Cristiane Jorge[2]
ICT-UNIFESP, São José dos Campos, SP

Um reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ é um subgrupo aditivo e discreto de $\mathbb{R}^n$ [1]. Dizemos que um conjunto $\Lambda' \subset \Lambda$ é um sub-reticulado se Λ' for um subgrupo aditivo de Λ. Dizemos que um reticulado Λ é inteiro se $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$. A métrica ℓ_p é definida para $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $p \geq 1$ como

$$d_p(x,y) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}. \tag{1}$$

Para $p = 1$, ℓ_1 é a métrica da soma e para $p = 2$, ℓ_2 é a métrica euclidiana.

Dados $\Lambda' \subset \Lambda$ reticulados, dizemos que Λ' é um código linear perfeito em relação ao reticulado ambiente Λ e a uma métrica fixada em $\mathbb{R}^n$ se, existe um raio $r > 0$ (raio de empacotamento) tal que ao traçarmos esferas com este raio ao redor de todos os pontos de Λ' estas esferas não se intersectam em Λ e a união delas resulta em Λ.

Códigos perfeitos no reticulado $\mathbb{Z}^n$ foram primeiramente estudados em [2] considerando a métrica da soma ℓ_1. Nesse artigo, Golomb e Welch apresentaram uma família de códigos lineares perfeitos na dimensão 2 com qualquer raio natural e uma família de códigos lineares perfeitos em qualquer dimensão e com raio igual a 1. Eles conjecturaram que não existem códigos lineares perfeitos em $\mathbb{Z}^n$ na métrica ℓ_1 para $n \geq 3$ e $r \geq 2$. Esta conjectura completou 50 anos do seu enunciado em 2018 e tem sido a principal responsável pelo desenvolvimento do estudo de códigos na métrica da soma [3]. Embora a conjectura tenha sido abordada de várias maneiras, usando diferentes técnicas, nenhuma delas resultou na demonstração do caso geral. Por exemplo, em [4] foi demonstrado que não existem códigos lineares perfeitos em $\mathbb{Z}^n$ na métrica ℓ_1 para $7 \leq n \leq 12$ e raio 2. Em [5] foi demonstrado que não existem códigos lineares perfeitos em $\mathbb{Z}^n$ na métrica ℓ_1 e raio 2 para infinitos valores de n.

Devido à escassez de códigos lineares perfeitos em $\mathbb{Z}^n$ na métrica da soma, em [6] foram considerados códigos lineares perfeitos em $\mathbb{Z}^n$ na métrica ℓ_p, $p \geq 1$. Nesse artigo, com a ajuda de um algoritmo computacional, foi demonstrado que só existem códigos lineares perfeitos em $\mathbb{Z}^n$ na métrica ℓ_2 para $n = 2$ e raios 1, $\sqrt{2}$, 2 e $2\sqrt{2}$ e para $n = 3$ e raios 1, $\sqrt{3}$. Foi conjecturado que se $r > 1$ e $n > 3$ não existem códigos lineares perfeitos em $\mathbb{Z}^n$ na métrica ℓ_2.

Já em [7] os autores propuseram uma nova generalização ao considerar códigos lineares perfeitos em reticulados ambientes Λ diferentes de $\mathbb{Z}^n$, na métrica ℓ_p. Nesse artigo foram obtidos todos os códigos lineares perfeitos nos reticulados ambientes A_2, D_3 e D_3^* (reticulado dual de D_3) na métrica ℓ_2.

Neste trabalho, vamos apresentar o algoritmo utilizado por [6] e [7] para a classificação dos códigos lineares perfeitos em $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^3$, A_2, D_3 e D_3^* na métrica euclidiana.

O primeiro passo é buscar um limitante para o raio de empacotamento de um código linear perfeito em Λ na métrica ℓ_p. Dado um reticulado $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$, a densidade de empacotamento de Λ na métrica ℓ_p, denotada por $\Delta_p^n(\Lambda)$, é a proporção do espaço $\mathbb{R}^n$ coberto por esferas idênticas com

[1] ranribeiro@unifesp.br
[2] grasiele.jorge@unifesp.br

o maior raio possível de forma que quaisquer duas esferas ou não se tocam ou se tocam apenas no bordo. Seja $\Delta_p^n = \sup_\Lambda \Delta_p^n(\Lambda)$, onde $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ é reticulado. Em [7] foi demonstrado que

$$r_p \leq \frac{M(1 + (\Delta_p^n)^{1/n})}{(1 - (\Delta_p^n)^{1/n})}, \tag{2}$$

onde $M = \min_{z \in \Lambda} \|x/2 - z\|$.

De posse deste resultado, usa-se o seguinte resultado de [8], que é uma generalização de um resultado de [9] obtido para o reticulado $\mathbb{Z}^n$: Seja $\mathcal{P} \subset \Lambda$, tal que $|\mathcal{P}| = m$. Existe um ladrilhamento de Λ por transladados de $\mathcal{P}$ se, e somente se, existem um grupo abeliano G de ordem m e um homomorfismo $\phi : \Lambda \to G$ tal que a restrição de ϕ a $\mathcal{P}$ é uma bijeção.

Tomando P igual a bola centrada na origem com raio $r \leq r_p$ na métrica ℓ_p em Λ, com auxílio de um algoritmo computacional, busca-se por todos os homomorfismos de Λ em grupos abelianos G com $|G| = |P|$ cuja restrição do domínio a $\mathcal{P}$ é uma bijeção. Testando todos os valores possíveis de r menores ou iguais ao limitante, tem-se todos os códigos lineares perfeitos em Λ, caso existam. Os códigos lineares perfeitos neste caso são os núcleos dos homomorfismos que satisfazem a condição imposta. Por exemplo, ao pesquisar por códigos lineares perfeitos em $\mathbb{Z}^2$ na métrica ℓ_2, obtemos homomorfismos $\phi(x, y) = x + \overline{2}y \in \mathbb{Z}_5$, $\phi(x, y) = x + \overline{3}y \in \mathbb{Z}_9$, $\phi(x, y) = x + \overline{5}y \in \mathbb{Z}_{13}$ e $\phi(x, y) = x + \overline{5}y \in \mathbb{Z}_{25}$ satisfazendo a condição imposta. Os códigos lineares perfeitos associados a estes homomorfismos são seus núcleos, ou seja, os reticulados gerados como combinações lineares inteiras de $\{(1, 2), (0, 5)\}$, $\{(3, 2), (0, 3)\}$, $\{(1, 5)), (3, 2)\}$ e $\{(5, 4), (0, 5)\}$, respectivamente.

Agradecimentos

Agradecemos à CAPES pelo auxílio financeiro.

Referências

[1] C. C. Lavor, M. M. S. Alves, R. M. Siqueira e S. I. R. Costa. **Uma introdução à teoria de códigos**. Notas em Matemática Aplicada. SBMAC, 2006.

[2] S. W. Golomb e L. R. Welch. "Perfect Codes in the Lee Metric and the Packing of Polyominoes". Em: **SIAM Journal on Applied Mathematics** 18 (1970), pp. 302–317.

[3] P. Horak e D. Kim. "50 Years of the Golomb-Welch Conjecture". Em: **IEEE Transactions on Information Theory** 64.4 (2018), pp. 3048–3061.

[4] P. Horak e O. Grosek. "A new approach towards the Golomb-Welch conjecture". Em: **European Journal of Combinatorics** 38 (2014), pp. 12–22.

[5] C. Qureshi, A. Campello e S. I. R. Costa. "Non-Existence of Linear Perfect Lee Codes With Radius 2 for Infinitely Many Dimensions". Em: **IEEE Transactions on Information Theory** 64.4 (2018), pp. 3042–3047.

[6] A. Campello, G. C. Jorge, J. E. Strapasson e S. I. R. Costa. "Perfect codes in the ℓ_p metric". Em: **European Journal of Combinatorics** 53 (2016), pp. 72–85.

[7] G. Strey, J.E. Strapasson e S. I. R. Costa. "Perfect codes in Euclidean lattices". Em: **Computational and Applied Mathematics** 40 (2021), pp. 302–317.

[8] G. Strey. "Códigos Perfeitos e Ladrilhamentos em Diversos Reticulados Ambientes". Tese de doutorado. IMECC/UNICAMP, 2020.

[9] P. Horak e B.F. AlBdaiwi. "Diameter Perfect Lee Codes". Em: **IEEE Transactions on Information Theory,** 58.8 (2012), pp. 5490–5499.