

Resolução de uma EDP elíptica sublinear

Mariele Vaz Quiraldello,¹ Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta²
 FCT - UNESP, Presidente Prudente, SP

As Equações Diferenciais Parciais (EDPs) são uma das mais poderosas ferramentas matemáticas para a modelagem de fenômenos físicos, químicos, biológicos e sociais. Dentre essas, as do tipo elíptico se destacam por descrever estados estacionários de fenômenos de evolução associados a equações parabólicas e hiperbólicas.

Entre os métodos modernos para resolução de EDPs elípticas, temos os métodos variacionais, os quais consistem em associar um funcional energia ao problema, de modo que os seus pontos críticos correspondam às soluções fracas da equação considerada.

Nesse trabalho, estudaremos a seguinte equação:

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{q-2}u & \text{em } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

onde Ω é um domínio suave e limitado do \mathbb{R}^N e $1 < q < 2$.

É possível provar que as soluções fracas de (1) correspondem aos pontos críticos do funcional $I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $H_0^1 = \{v \in L^2(\Omega); \nabla v \in L^2(\Omega)\}$ é um dos chamados Espaços de Sobolev [2]. Assim, temos que $I(u)$ é dado por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \frac{1}{q} \int_{\Omega} |u|^q, \quad (2)$$

cuja derivada é dada por

$$I'(u)v = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v - \int_{\Omega} |u|^{q-2}uv. \quad (3)$$

Em relação à esse funcional, podemos fazer as seguintes considerações. Primeiramente, temos que I é fracamente semicontínuo inferiormente. Além disso, I é coercivo, isto é, dado $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$, temos que $I(u_n) \rightarrow +\infty$, quando $\|u_n\| \rightarrow +\infty$. [3]

Assim, pelo fato do funcional satisfazer essas propriedades, utilizaremos um resultado abstrato de minimização global, o qual enuncia a existência de mínimos globais.

Teorema 0.1. *Seja E um espaço de Hilbert ou Banach reflexivo e $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional tal que*

- i) ϕ é fracamente semicontínuo inferiormente e*
- ii) ϕ é coercivo.*

Então, ϕ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in E$ tal que

$$\phi(u_0) = \inf_E \phi.$$

¹m.quiraldello@unesp.br

²marcos.pimenta@unesp.br

Dessa forma, pelo Teorema (0.1), concluímos a existência de um ponto de mínimo global $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ do funcional (2). Ainda, uma vez que o $I(u)$ é de classe C^1 , isso nos fornecerá um ponto crítico de (2) e, portanto, uma solução fraca do problema (1).

Por último, é necessário demonstrarmos que a solução encontrada é diferente da solução trivial, ou seja, $u_0 \neq 0$. Para isso, faremos uma análise da geometria do funcional perto da origem, demonstrando que esse assume valores negativos de energia [3]. Por fim, resultados de regularidade elíptica implicam que a solução fraca u_0 , de fato, é uma solução clássica de (1). [1]

Agradecimentos

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro para o desenvolvimento do projeto (processo n° 2022/14163-8).

Referências

- [1] A. Ambrosetti e A. Malchiodi. **Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems**. Cambridge, Nova Iorque, 2007.
- [2] H. Brézis. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Springer, Universitext, 2011.
- [3] G. J. M. Figueiredo. **Uma introdução à teoria de pontos críticos**. Notas de aula, 2016.