Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Coloração total equilibrada dos snarks de Loupekine

Rieli Araújo[1], Diana Sasaki[2]
CCOMP/UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Uma *coloração total* de um grafo G é uma atribuição de cores tanto para os seus vértices, quanto para suas arestas de forma que não tenhamos cores iguais atribuídas aos elementos adjacentes e incidentes. Quando uma coloração total do grafo utilizar um conjunto de k cores, chamaremos esta de *k-coloração total* e o *número cromático total* de G, denotado por $\chi''(G)$, é o menor k para o qual G possui uma k-coloração total. É claro ver que o $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$, onde $\Delta(G)$ é o seu grau maximo. Além do limite inferior, a Conjectura 1 estabelece um limite superior para o número cromático total.

Conjectura 1 (Conjectura da Coloração Total (TCC) [1, 6])**.** *O número cromático total de um grafo simples* $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Em [4] verificou-se que a Conjectura da Coloração Total é válida para os grafos cúbicos, e assim temos que o número cromático total dos grafos cúbicos é 4 (chamados *Tipo 1*) ou 5 (chamados *Tipo 2*). Uma coloração total é *equilibrada* quando as cardinalidades de quaisquer duas classes de cor diferem em no máximo 1. Logo, o *número cromático total equilibrado* $\chi''_e(G)$ é o menor k para o qual G possui uma k-coloração total equilibrada. O mesmo limite inferior do número cromático se aplica neste contexto e a Conjectura 2 estabelece um limite superior para este valor.

Conjectura 2 (Conjectura da Coloração Total Equilibrada (ETCC) [7])**.** *O número cromático total equilibrado de um grafo simples* $\chi''_e(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Em [7] verificou-se que a Conjectura da Coloração Total Equilibrada é válida para os grafos cúbicos e assim o número cromático total equilibrado destes é 4 ou 5. Existem infinitos grafos cúbicos Tipo 1 com $\chi''_e(G) = 5$ [3], mas todos com cintura menor que 5. Motivadas pela questão proposta em [3] sobre a existência de um grafo cúbico Tipo 1 com cintura pelo menos 5 e que tenha o número cromático total equilibrado 5, verificou-se em [5] que todos os membros das duas famílias infinitas de Loupekine são tipo 1. Posteriormente em [2] foi provado que todos os membros da primeira família de Loupekine possuem uma 4-coloração total equilibrada. Assim, continuamos a investigação da questão, estabelecendo o teorema que segue, em que apresentamos uma 4-coloração equilibrada para cada snark da segunda família Loupekine, contribuindo como evidência negativa para a questão.

Teorema 1. *Todos os snarks da segunda família infinita de Loupekine possuem número cromático total equilibrado 4.*

Ideia da prova O primeiro grafo desta família possui 22 vértices e 33 arestas (L_0). A construção do segundo membro acontece da seguinte forma, a partir do grafo L_0 apresentado na Figura 1, estendemos a família infinitamente através de um processo iterativo de adicionar um bloco de ligação B, preservando as propriedades dos snarks. Com base no padrão de crescimento da família, para obter 4-colorações totais equilibradas para todos os membros, foi necessário colorir B com

[1]rieli.araujo@pos.ime.uerj.br
[2]diana.sasaki@ime.uerj.br

quatro 4-colorações totais distintas, conforme as Figuras 2a, 2b, 2c, 2d. Essa necessidade decorre da observação de que os números de elementos não são divisíveis por 4, que é o número cromático almejado. Sendo assim, ao adicionar cada bloco, as colorações de cada se mantêm equilibrada sem que seja necessário alterar a coloração de L_0 No entanto, é importante ressaltar que os blocos devem ser inseridos de forma ordenada e cíclica. Por exemplo, após adicionar o bloco B_3, o próximo membro da família exigirá a inserção do bloco B_0. Essa sequência é fundamental para manter as colorações equilibradas e sem conflitos. No caso geral temos que a coloração do grafo L_n é obtida por $L_{n-1} + B_{n(mod\ 4)}$.

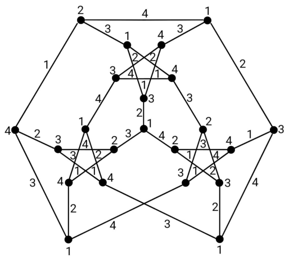
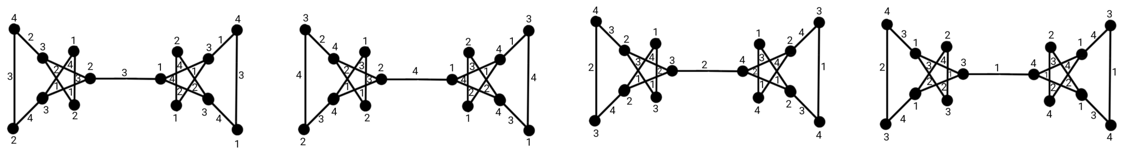


Figura 1: Uma 4-coloração total equilibrada para o snark de Loupekine L_0.



(a) Bloco B_0 (b) Bloco B_1 (c) Bloco B_2 (d) Bloco B_3

Figura 2: Bloco B com 4 colorações totais distintas.

Referências

[1] M. Behzad. “Graphs and Their Chromatic Numbers”. Tese de doutorado. Michigan State University, 1965.

[2] L. Cordeiro, S. Dantas e D. Sasaki. “On equitable total colouring of Loupekine Snarks and their products”. Em: **Matemática Contemporânea** 45 (2017), pp. 77–85. DOI: 10.21711/231766362017/rmc459.

[3] S. Dantas et al. “On the equitable total chromatic number of cubic graphs”. Em: **Discrete Applied Mathematics** 209 (2016), pp. 84–91. DOI: 10.1016/j.dam.2015.10.013.

[4] M. Rosenfeld. “On the total chromatic number of a graph”. Em: **Israel Journal of Mathematics** 9 (1971), pp. 396–402. DOI: 10.1007/BF02771690.

[5] D. Sasaki et al. “The hunting of a snark with total chromatic number 5”. Em: **Discrete Applied Mathematics** 164 (2014), pp. 470–481. DOI: 10.1016/j.dam.2013.04.006.

[6] V. G. Vizing. “On an estimate of the chromatic class of a p-graph.” Em: **Diskret Analiz** 3 (1964), pp. 25–30.

[7] W. Wang. “Equitable Total Coloring of Graphs with Maximum Degree 3”. Em: **Graphs and Combinatorics** 18 (2002), pp. 677–685. DOI: 10.1007/s003730200051.

