Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Movimentos rígidos no plano e o grupo euclidiano

Emili da Silva Silgueiros [1], Rodrigo Benites dos Santos [2], Thales Fernando Vilamaior Paiva[3]
UFMS/CPAq, Aquidauana, MS

Muito do que compreendemos a respeito do conceito de beleza e harmonia vem do que chamamos de simetria, que pode ser entendido, de maneira informal, como a existência e perceptividade de certos padrões de similaridade e proporcionalidade. Segundo Armstrong [1], em seu prefácio, uma maneira apropriada de ivestigar tais padrões de simetria é utilizando o conceito matemático de grupo, tal qual um conjunto munido de uma operação binárica satisfazendo certos axiomas derivados do que ocorre em conjuntos numéricos.

O presente texto trata-se de um resumo dos resultados preliminares estudados durante os primeiros meses de iniciação científica, cujo objetivo geral é investigar conceitos geométricos relacionados à simetria de movimentos rígidos no plano, utilizando ferramentas algébricas da teoria dos grupos. Para esse fim, usamos livremente elementos básicos de teoria dos grupos, tais como homomorfismos e produtos direto e semidireto, tendo como referências principais os textos [1, 2] e [3]

Seja $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$ o plano euclidiano, munido da sua métrica usual

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{1}$$

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma isometria quando $d(f(u), f(v)) = d(u, v)$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$, e indicamos pelo símbolo $Iso(\mathbb{R}^2)$ ao conjunto das isometrias do plano $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, fixado um vetor $v \in \mathbb{R}^2$, uma translação de v, indicada por $\tau_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\tau_v(u) = v + u$, é um elemento de $Iso(\mathbb{R}^2)$. Analogamente, rotações e reflexões no plano são exemplos de isometrias.

De forma geral, no conjunto $Iso(\mathbb{R}^2)$ verifica-se as seguntes propriedades:

(i) Se $f, g \in Iso(\mathbb{R}^2)$, então a composiçao $f \circ g$ é ainda uma isometria, ou seja, a composição define uma operação binária em $Iso(\mathbb{R}^2)$. Além disso, tal operação é associativa.

(ii) A aplicação identidade $Id : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $Id(u) = u$, claramente é uma isometria.

(iii) Se $f \in Iso(\mathbb{R}^2)$, então $f^{-1} \in Iso(\mathbb{R}^2)$, pois

$$\|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)\| = \|f(f^{-1}(u)) - f(f^{-1}(v))\| = \|u - v\|,$$

para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$.

Portanto, quando munido da operação de composição de funções, o conjunto $Iso(\mathbb{R}^2)$ torna-se um grupo, chamado de grupo euclidiano, ou grupo das isometrias do plano e, por conseguinte, ao investigar um movimento rígido em particular, ou de forma genérica, podemos então utilizar ferramentas algébricas em conjunto com técnicas geométricas.

Nessa direçao, é possível demonstrar que um elemento arbitrário em $Iso(\mathbb{R}^2)$ pode ser expresso por uma composição entre uma rotação em torno da origem e uma translação, ou uma reflexão a partir de uma reta e uma translação ([1], p. 136).

[1] es267332@gmail.com
[2] kgtrodrigokgt@gmail.com
[3] thales.paiva@ufms.br

Mais precisamente, sendo T o subconjunto de todas as translações $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e O o subconjunto das transformações ortogonais, isto é, $\sigma \in O$ somente quando σ consiste em uma rotação em torno da origem em conjunto com uma reflexão sobre uma reta, então temos o seguinte resultado.

Proposition 0.1. *Os subconjuntos T e O são subgrupos de $Iso(\mathbb{R}^2)$, com T normal. Além disso, o grupo euclidiano pode ser decomposto em $Iso(\mathbb{R}^2) = TO = \{\tau\sigma\,;\, \tau \in T \text{ e } \sigma \in O\}$.*

Sobre a etrutura da operação (o produto) em $Iso(\mathbb{R}^2)$, agora visto como um produto entre os grupos T e O, considere $g, h \in Iso(\mathbb{R}^2)$. Pela Proposição 0.1, existem $\tau, \tau_1 \in T$ e $\sigma, \sigma_1 \in O$ tais que $g = \tau\sigma$ e $h = \tau_1\sigma_1$. Logo, podemos expressar o elemento gh por

$$gh = (\tau\sigma)(\tau_1\sigma_1) = (\tau\sigma\tau_1)(\sigma^{-1}\sigma)\sigma_1 = (\tau\sigma\tau_1\sigma^{-1})(\sigma\sigma_1), \tag{2}$$

ou seja, gh é exatamente uma transformação ortogonal seguida por uma translação. Dessa forma, a função $g \mapsto (\tau, \sigma)$ define um isomorfismo entre $Iso(\mathbb{R}^2)$ e o produto semidireto $T \rtimes_\varphi O$, onde $\varphi : O \to Aut(T)$ é uma conjugação.

Em termos matriciais, uma isometria pode ser pensada como um par ordenado $(v, A) \in \mathbb{R}^2 \times O(2)$, onde $O(2) \subset M_2(\mathbb{R})$ denota o subgrupo ortogonal de ordem 2, além da existência de um isomorfismo entre $Iso(\mathbb{R}^2)$ e o produto semidireto $\mathbb{R}^2 \rtimes_\psi O(2)$, em que $\psi : O(2) \to Aut(\mathbb{R}^2)$ é a ação usual, via multiplicação. Nesse contexto, dizemos que uma isometria (v, A) é direta quando $\det A = 1$ e oposta se $\det A = -1$. Portanto, de forma geral, o trabalho de classificação de isometrias se reduz a um trabalho de classificação em $O(2)$. Mais precisamente, com essas identificações, obtemos o seguinte resultado geral de classificação par o grupo $Iso(\mathbb{R}^2)$.

Proposition 0.2 ([1], Theorem 24.1)**.** *Seja f uma ismetria do plano. Se f é direta, então é uma translação ou uma rotação. Se f é oposta, então é uma reflexão ou uma reflexão composta com uma transação.*

Referências

[1] M. A. Armstrong. **Groups and Symetry**. 1a. ed. New York: Springer-Verlag, 1988. ISBN: 0-38796675-7.

[2] G. E. Martin. **Transformation Geometry**. 1a. ed. New York: Springer-Verlag, 1982. ISBN: 0-387-90636-3.

[3] H. H. Domingues e G. Iezzi. **Álgebra Moderna**. 4a. ed. São Paulo: Atual, 2003. ISBN: 85-357-0401-9.