

Grafos e imersões de superfícies no 3-espço

Catarina Mendes de Jesus¹

DM/UFJF, Juiz de Fora, MG

A imersão de uma superfície fechada e orientada N no 3-espço pode ocorrer de várias formas, podendo apresentar ou não auto-interseções. A partir de uma imersão, é possível obter outras aplicações, como a função altura, aplicações no plano e aplicações de Gauss. Em todos os casos, o conjunto singular separa o conjunto regular em componentes conexas [1]. Isso permite estudar grafos como invariantes topológicos dessas aplicações, seguindo as seguintes descrições:

- **Função Altura:** Nas aplicações da função altura, as singularidades são do tipo pontos isolados, correspondente a máximo ou mínimo local da função, ou curvas fechadas com ponto de sela (ver Figura 2-(a)), o que resulta na decomposição da superfície em regiões regulares homeomorfas a um cilindro. Nesse caso, o grafo associado é conhecido como grafo de Reeb (ou Reeb-grafo) [2, 3], no qual as singularidades estão associadas aos vértices do grafo e as regiões regulares correspondem às arestas. Todo Reeb-grafo é 1-trivalente, o que significa que seus vértices têm grau 1 ou 3.

- **Aplicação no Plano:** As singularidades de uma aplicação no plano são do tipo pontos de dobras ou pontos de cúspides isolados, que formam curvas simples e fechadas sobre N (ver Figura 2-(b)), as quais separam as regiões regulares com gênero $t \leq 0$. Nesse caso, as curvas singulares corresponderem às arestas do grafo associado, chamado de \mathcal{M} -grafo (ou Mendes-grafos) em [3, 4], e as regiões regulares correspondem aos vértices, que recebem um peso t de acordo com o gênero da região. Uma aresta a é incidente a um vértice v se, e somente se, a curva α associada à aresta a é bordo da região associada ao vértice v . Em [5], foi demonstrado que todo grafo bibartido pode ser associado a alguma aplicação estável de uma superfície fechada e orientada N no plano.

- **Aplicação de Gauss:** As curvas singulares de uma aplicação de Gauss são conhecidas como curvas parabólicas e separam as regiões regulares elípticas e hiperbólicas (com gênero $t \leq 0$). Os vértices (com pesos $t \leq 0$) do grafo associado, chamado de \mathcal{F} -grafo (ou Fuster-grafos) [4], correspondem às regiões regulares e as arestas correspondem as curvas parabólicas. Em [6], foi demonstrado que todo grafo bibartido (com pesos inteiros positivos) pode ser associado a alguma aplicação de Gauss estável de uma superfície fechada e orientada N imersa no 3-espço.

Visando classificar as imersões de superfícies no espço tridimensional de diferentes formas, foram iniciados estudos sobre pares de grafos associados a duas aplicações provenientes de uma mesma imersão. No trabalho [3], foram estabelecidas condições necessárias para que um par de grafos (R, M) possa ser um \mathcal{RM} -grafo, ou seja R é um \mathcal{R} -grafo e M é um \mathcal{M} -grafo associado a uma imersão da esfera bidimensional no espço tridimensional. Já no trabalho [4], foram fornecidas condições necessárias para que um par de grafos (M, F) , com peso total zero, possa ser \mathcal{MF} -grafo, ou seja M é um \mathcal{M} -grafo e F é um \mathcal{F} -grafo, associado a uma imersão de uma superfície fechada e orientada N com gênero $1 - V + E$, onde V denota o número total de vértices de um dos grafos e E denota o número de arestas. O caso geral destes pares de grafos, incluindo \mathcal{RF} -grafo, ainda está sendo estudado (ver Figura 1). Fica a seguinte pergunta como desafio: qual é a condição necessária para que uma tripla de grafos (R, M, F) possa ser associado a uma tripla de aplicações, todas provenientes da mesma imersão de uma superfície fechada e orientada no espço tridimensional? A Figura 2 ilustra exemplo de uma tripla de grafos associado a uma imersão do toro no 3-espço: (a) função altura, (b) aplicações no plano e (c) aplicações de Gauss.

¹cmendesjesus@ufjf.br

O objetivo deste trabalho é divulgar os grafos como invariantes topológicos associados a essas três aplicações de uma superfície fechada e orientada, além de apresentar os resultados sobre \mathcal{RM} -grafos e \mathcal{MF} -grafos, obtidos em [3] e [4].

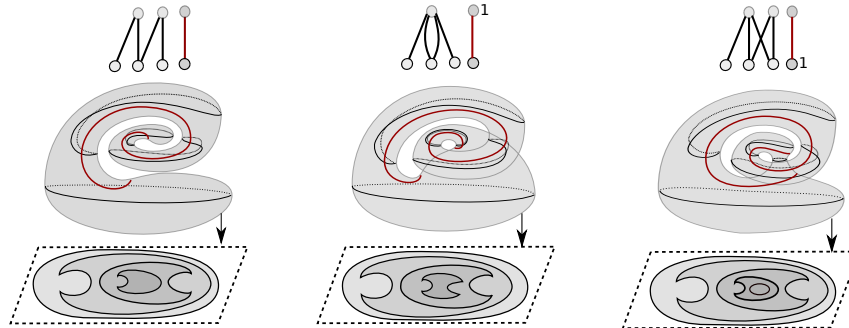


Figura 1: Exemplos de \mathcal{MF} -grafos da esfera com única curva parabólica.

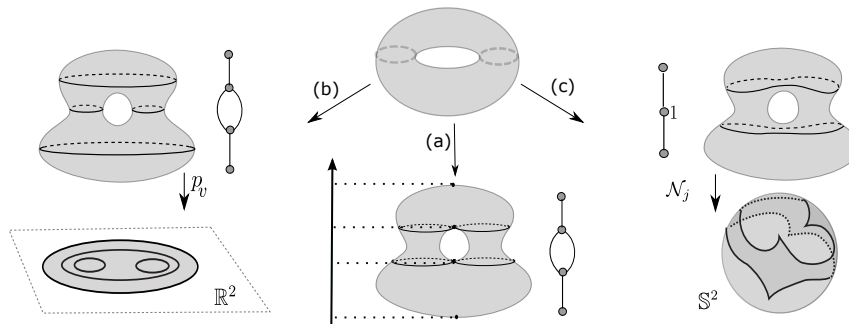


Figura 2: Exemplo de aplicações do toro associadas a um \mathcal{RMF} -grafo.

Referências

- [1] M. Golubitsky e V. Guillemin. **Stable Mappings and Their Singularities**. Springer Verlag, Berlin. Springer Verlag, Berlin, 1976. ISBN: 978-1-4615-7904-5.
- [2] E. B. Batista, J. C. F. Costa e J. J. Nuño-Ballesteros. “The Reeb graph of a map germ from \mathbb{R}^3 to \mathbb{R}^2 without isolated zeros”. Em: **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society** 49 (2018), pp. 369–394. DOI: 10.1007/s00574-017-0058-4.
- [3] C. M. Mendes de Jesus, E. B. Batista e J. C. F. Costa. “Stable Bi-Maps on Surfaces and Their Graphs”. Em: **Trends in Computational and Applied Mathematics** 24 (2023), pp. 337–356.
- [4] C. M. Mendes de Jesus, P. D. Romero e L. J. Santos. “Stable Plane-Gauss Maps on Closed Orientable Surfaces”. Em: **Trends in Computational and Applied Mathematics** 24 (2023), pp. 305–318.
- [5] D. Hacon, C. Mendes de Jesus e M. C. Romero-Fuster. “Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data”. Em: **Topology and Its Applications** 154 (2007), pp. 166–175. DOI: 10.1016/j.topol.2006.04.005.
- [6] C. Mendes de Jesus, S. M. Moraes e M. C. Romero-Fuster. “Stable Gauss maps on surfaces from a global viewpoint”. Em: **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society** 42 (2011), pp. 87–103. DOI: 10.1007/s00574-011-0005-8.