

Escoamento sobre um Degrau: Uma Abordagem Numérica Utilizando PythonTM

Mateus Mitsuo Goto Dakuzaku¹, Gilcilene Sanchez De Paulo²

FCT-UNESP, Presidente Prudente, SP

Caroline Viezel³

Doutora em Ciências da Computação e Matemática Computacional pelo ICMC/USP

O problema a ser resolvido numericamente envolve o escoamento de fluidos Newtonianos em um canal bidimensional com uma expansão abrupta na parede inferior, formando um degrau [1]. A Figura 1 ilustra a geometria deste problema clássico, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é o interior do domínio. O fluido entra pela fronteira $\partial\Omega_2$ e sai pela fronteira $\partial\Omega_4$; e as fronteiras $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_3$ representam as paredes rígidas. As dimensões adotadas são: $L = 4$, $l = 1$, $H = 2$, $h = 1$.

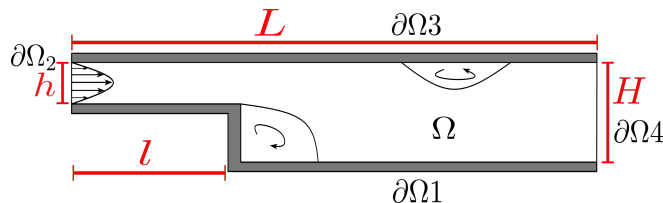


Figura 1: Geometria do problema.

As equações de Navier-Stokes escritas de acordo com a formulação “Corrente-Vorticidade” são representadas pelas equações (1) e (2), escritas na forma adimensional, e serão utilizadas para modelar este problema.

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \mathbf{u}) = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \text{ em } \Omega \times [0, T], \quad (1)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \text{ em } \Omega \times [0, T], \quad (2)$$

onde $Re = \rho U h / \mu$ é o número de Reynolds, sendo ρ a massa específica do fluido, μ a viscosidade do fluido e U a velocidade média do escoamento; $\mathbf{u}(x, y, t)$ representa o campo de velocidade, em que $(x, y) \in \Omega$ são as coordenadas espaciais e $t \in [0, T]$ representa a variável temporal, com $T \in \mathbb{R}_+^*$. A função escalar $\omega(x, y, t)$ é a componente não-nula da vorticidade descrita no sistema de equações (3) e $\psi = \psi(x, y, t)$ é uma função escalar, tal que:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad \text{e} \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3)$$

em que $u = u(x, y, t)$ e $v = v(x, y, t)$ são os componentes do campo vetorial \mathbf{u} nas direções x e y , respectivamente.

As condições iniciais e de contorno para a velocidade são: para $t = 0$, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ em Ω ; e $\forall t > 0$, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ em Ω_1 e Ω_3 ; $u = 1$ e $v = 0$ em Ω_2 ; $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{0}$ em Ω_4 . Conseqüentemente, tem-se $\psi = 0$ em Ω_1 ;

¹mateus.mitsuo@unesp.br, bolsista IC FAPESP Proc. 2022/00403-7

²gilcilene.sanchez@unesp.br

³carol.viezel@gmail.com

2

$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U$ em Ω_2 ; $\psi = 1$ em Ω_3 ; $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ em Ω_4 e $\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}$ em $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, sendo η a direção normal à fronteira, e $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$ em Ω_4 .

As equações (1)-(3) são aproximadas pela técnica de diferenças finitas utilizando as aproximações centradas nas direções x e y , e o método de Euler explícito em relação ao tempo, como:

$$\omega_{i,j}^{n+1} = \omega_{i,j}^n + \Delta t \cdot \left[\frac{1}{Re} \cdot \left(\left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right) - u_{i,j}^n \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - v_{i,j}^n \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right], \quad (4)$$

$$\frac{1}{\Delta y^2} \psi_{i,j-1}^{n+1} + \frac{1}{\Delta x^2} \psi_{i-1,j}^{n+1} - 2 \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \psi_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{\Delta x^2} \psi_{i+1,j}^{n+1} + \frac{1}{\Delta y^2} \psi_{i,j+1}^{n+1} = -\omega_{i,j}^{n+1}, \quad (5)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \quad \text{e} \quad v_{i,j}^{n+1} = -\frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x}. \quad (6)$$

O algoritmo computacional foi implementado na linguagem Python[™], no qual conhecendo-se u^n , v^n , ω^n e ψ^n no domínio e nos contornos, segue-se os seguintes passos: (i) Calcula-se $\omega_{new} = \omega_{i,j}^{n+1}$, pela equação (4); (ii) Atualiza $\psi_{i,j}^{n+1}$ nos contornos e calcula $\psi_{i,j}^{n+1}$ em Ω , pela equação de Poisson (5); (iii) Atualiza $\omega_{i,j}^{n+1}$ nos contornos; (iv) Calcula $u_{i,j}^{n+1}$ e $v_{i,j}^{n+1}$, utilizando a equação (6); (v) Se não atingiu o estado estacionário, $\omega^n = \omega_{new} = \omega^{n+1}$ e volta ao passo (i).

Para as simulações numéricas, utilizamos $\Delta x = \Delta y = 1/15$, $\Delta t = 0.01$, e três diferentes Reynolds: $Re = 10, 50$ e 100 . A Figura 2 apresenta as linhas de corrente para estes escoamentos. Nota-se o surgimento de vórtices próximo ao degrau, o que está em concordância qualitativa com a literatura, que quanto maior Re , maior o tamanho do vórtice [1].

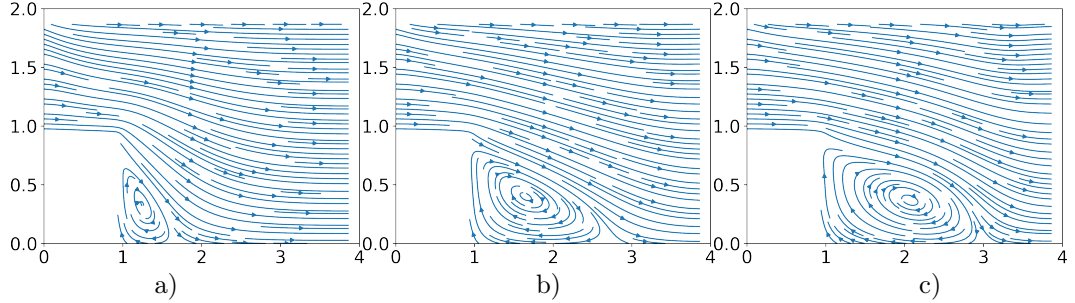


Figura 2: Linhas de corrente do fluido. a) $Re = 10$, b) $Re = 50$ e c) $Re = 100$.

Agradecimentos

Agradeço à FAPESP (Proc. 2022/00403-7), CNPq (Proc. 130987/2023-9), SBMAC e POSMAC.

Referências

- [1] G. Biswas, M. Breuer e F. Durst. “Backward-facing step flows for various expansion ratios at low and moderate Reynolds numbers”. Em: **Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME** 126 (3 mai. de 2004), pp. 362–374. ISSN: 00982202. DOI: 10.1115/1.1760532.