Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Resolução Numérica de Problemas de Valor Inicial de Segunda Ordem

Abdiel J. A. da Silva[1], Thamyrys M. Azevedo[2], Matheus da S. Menezes[3], Ivan Mezzomo[4], Stefeson B. M.[5]
CCEN/UFERSA, Mossoró, RN

Equações diferenciais é um ramo de estudo que retrata diversos modelos comportamentais da ciência, como os circuitos elétricos. A principal característica dessas equações é que ela contém derivadas em sua estrutura. Dentre os seus tipos, temos as equações diferenciais ordinárias (EDO's) que englobam aquelas com apenas uma variável independente [1]. A solução de uma EDO gera uma família de curvas, podendo ser reduzida a uma solução particular através de um problema de valor inicial (PVI) [2]. Este trabalho tem como objetivo, analisar a eficiência dos métodos de Euler, Heun e Runge-Kutta de 4.º ordem na resolução de EDO's de segunda ordem, com base na média dos erros absolutos e relativos.

Segundo [3], o PVI de segunda ordem pode ser reduzido para primeira ordem, de forma a facilitar os cálculos e aplicação dos métodos numéricos.

O método de Euler representa uma das técnicas mais simples para aproximação de soluções de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com um PVI conhecido [4]. Este método parte de um ponto inicial e projeta um novo ponto através da reta tangente. A equação geral é dada por:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hu_i \\ u_{i+1} = u_i + hf(x_i, y_i, u_i) \end{cases} \tag{1}$$

O método de Heun, também chamado de Euler melhorado, apresenta uma estratégia para encontrar a solução numérica com melhor precisão, determinando duas derivadas e calculando a média. A equação para o método de Heun é $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$, em que $k_1 = f(x_i, y_i)$ e $k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1)$ são derivadas calculadas em pontos diferentes. Esse método pode ser aplicado a sistemas de ordem 1 ou 2. Como mencionado anteriormente, é possível reduzir o PVI de ordem 2 para ordem 1. Portanto, o sistema descrito pode ser aplicado ao método de Heun, conforme demonstrado na equação a seguir:

$$\begin{cases} y_{i+1} &=& y_i + h(u_i + \frac{1}{2}k_1) \\ u_{i+1} &=& u_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 &=& hf(x_i, y_i, u_i) \\ k_2 &=& hf(x_i + h, y_i + hu_i, u_i + k_1) \end{cases} \tag{2}$$

O método de Runge-Kutta pode ser compreendido como um aperfeiçoamento do método de Euler, com uma melhor estimativa da derivada da função. No método de Euler a estimativa do valor de y_{i+1} é realizado com o valor de y_i e com a derivada no ponto x_i. Como estamos centrados

[1]abdiel.silva@alunos.ufersa.edu.br
[2]thamyrys.azevedo@alunos.ufersa.edu.br
[3]matheus@ufersa.edu.br
[4]imezzomo@ufersa.edu.br
[5]stefeson@ufersa.edu.br

no estudo de EDO's de segunda ordem, o método de Runge-Kutta para segunda ordem é calculado através da seguinte equação:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\ u_{i+1} = u_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases} \tag{3}$$

onde temos $m_1 = u_n$; $m_2 = u_n + \frac{1}{2}hk_1$; $m_3 = u_n + \frac{1}{2}hk_2$ e $m_4 = u_n + hk_3$, de maneira que $k_1 = f(x_n, y_n, u_n)$; $k_2 = f(x_n, \frac{1}{2}hm_1, u_n + \frac{1}{2}hk_1)$; $k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hm_2, u_n + \frac{1}{2}hk_2)$ e $k_4 = f(x_n + h, y_n + hm_3, u_n + hk_3)$.

Para este trabalho vamos efetuar o comparativo do desempenho dos métodos numéricos já mencionados na resolução de um problema de valor inicial (PVI) para um circuito RLC subamortecido no intervalo i = *[0;1]* com variações do espaçamento $(h) = 0.1$, 0.01, 0.001 e 0.0001, de modo a analisar o erro produzido a cada passo em cada um dos métodos. Para isto, considere o seguinte PVI:

$$I'' + 10I' + 64I = 0, \quad \text{com } I(0) = 0 \; e \; I'(0) = 1. \tag{4}$$

Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 1

Tabela 1: Resultados obtidos para cada método a cada valor de h.

h	Erro Euler	Erro Euler (%)	Erro Heun	Erro Heun (%)	Erro R.K.	Erro R.K. (%)
0.1	não estima	não converge	não estima	não converge	1.3581x10^{-4}	19.973
0.01	1.2620x10^{-3}	49.95	3.7438x10^{-5}	0.6466	1.0109x10^{-8}	4.2660x10^{-4}
0.001	1.2088x10^{-4}	8.9050	3.6477x10^{-7}	0.011716	9.7856x10^{-13}	7.7128x10^{-8}
0.0001	1.2038x10^{-5}	0.6319	3.6377x10^{-9}	8.7259x10^{-5}	1.8541x10^{-15}	1.1881x10^{-10}

Os dados apresentados na Tabela 1 nos mostram que o método de Runge-Kutta de quarta ordem, obteve as melhores aproximações com as menores taxas de erros em todos os tamanhos de passo h abordados, seguido pelo método de Heun, enquanto o método de Euler obteve os piores resultados. Além disso, para o problema do circuito RLC subamortecido, foi possível observar que o comportamento da solução expressa pelos métodos numéricos tendeu a se aproximar melhor do resultado analítico à medida que o valor de h diminuiu.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da UFERSA e do CNPq na execução deste trabalho.

Referências

[1] J. Stewart. **Cálculo**. 7a. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[2] L. C. Barroso e M. M. A. Barroso. **Cálculo Numérico (com aplicações**. 2a. ed. São Paulo: Harbra, 1987.

[3] D. G. Zill e M. R. Cullen. **Equações Diferenciais**. 3a. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

[4] S. Chapra. **Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB para Engenheiros e Cientistas**. 3a. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.