

Propriedades dinâmicas de um mapa Hénon filtrado

Vinícius S. Borges¹ Magno T. M. Silva² Marcio Eisencraft³

Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo-SP

Nos últimos anos, têm surgido diversas propostas de aplicações de sinais caóticos na transmissão de informações digitais, veja por exemplo [1]. Uma vez que os canais de transmissão são normalmente de largura de banda limitada, conhecer e controlar o espectro dos sinais transmitidos é um problema relevante quando se utilizam sinais caóticos nos sistemas de comunicação. Neste sentido, pode-se utilizar um filtro discreto de resposta a impulso finito (FIR - *Finite Impulse Response*) incorporado num gerador de sinais caóticos como forma de controlar o conteúdo espectral dos sinais gerados [2]. Demonstrou-se que a inserção deste filtro não afeta a sincronização caótica [2], o que é essencial para comunicação baseada em caos.

No entanto, a questão sobre a interferência do filtro na dinâmica do sistema ainda precisa ser mais profundamente analisada. Uma análise para o caso de um filtro FIR de dois coeficientes associado a um mapa Hénon apareceu recentemente em [3]. Dessa forma, o objetivo deste resumo é mostrar alguns resultados numéricos para o caso com mais coeficientes. Mais precisamente, considera-se um filtro FIR passa-baixas projetado utilizando-se uma janela de Hamming [4] variando-se o número de zeros do filtro, N_z , e sua frequência de corte, ω_c .

Considere o mapa de Hénon [5]

$$\begin{cases} x_1(n+1) = \alpha - x_1(n)^2 + \beta x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) \end{cases} \quad (1)$$

com parâmetros $\alpha = 1.4$ e $\beta = 0.3$. Sabe-se que esse mapa gera sinais caóticos para um extenso conjunto de condições iniciais [5]. Filtra-se então a componente $x_1(n)$ por um filtro FIR passa-baixas gerando um sinal $x_3(n) = \sum_{j=0}^{N_z} c_j x_1(n-j)$, em que c_j , $j = 0, 1, \dots, N_z$, $N_z \geq 1$, $c_0 \neq 0$, são os coeficientes do filtro [4]. Este sinal é então realimentado no lugar de $x_1(n)$ na primeira equação de (1). Obtém-se assim o sistema

$$\begin{cases} x_1(n+1) = \alpha - (x_3(n))^2 + \beta x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) \\ x_3(n+1) = \sum_{j=0}^{N_z} c_j x_1(n-j+1) \end{cases} \quad (2)$$

Os dois pontos fixos de (2) são dados por $\mathbf{p}^{+,-} = [p_1^{+,-}, p_1^{+,-}, Gp_1^{+,-}]$ sendo

$$p_1^{+,-} = \frac{-(1-\beta) \pm \sqrt{(1-\beta)^2 + 4\alpha G^2}}{2G^2} \quad (3)$$

e $G = \sum_{j=0}^{N_z} c_j$. Análises numéricas mostraram que \mathbf{p}^- é sempre instável e \mathbf{p}^+ pode ser estável ou instável dependendo de N_z e ω_c . Para os casos em que \mathbf{p}^+ resultou instável, utilizou-se o cálculo numérico do expoente de Lyapunov [3] para detectar a presença de órbitas periódicas ou caóticas. A Figura 1 mostra os resultados obtidos.

¹viniciusb@usp.br

²magno.silva@usp.br

³marcioft@usp.br

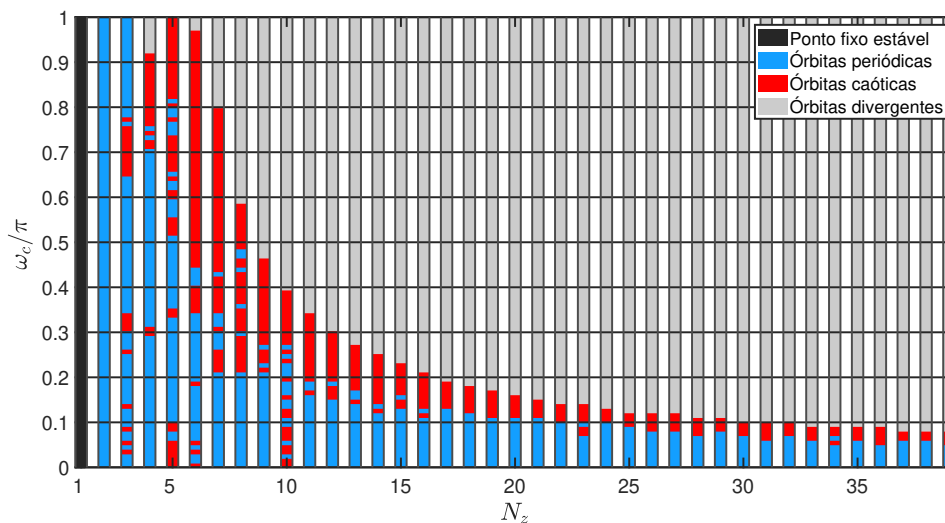


Figura 1: Dinâmica do sistema (2) em função do número de zeros N_z e da frequência de corte ω_c do filtro.

Nota-se que \mathbf{p}^+ é estável apenas no caso $N_z = 1$. Para $N_z > 4$, conforme aumenta-se ω_c as órbitas periódicas dão lugar a órbitas caóticas e a seguir a órbitas divergentes. Estes resultados mostram a relevância de projetar o filtro passa-baixas adequadamente para que se mantenha o comportamento caótico do sistema original.

Agradecimentos

VSF recebeu apoio financeiro do CNPq (Processo 140081/2022-4). MTMS recebeu apoio financeiro da FAPESP (Processo 2021/02063-6) e do CNPq (Processo 303826/2022-3). ME recebeu apoio financeiro do CNPq (Processo 311039/2019-7).

Referências

- [1] Murilo S. Baptista. “Chaos for communication”. Em: **Nonlinear Dynamics** 105.2 (jul. de 2021), pp. 1821–1841. DOI: 10.1007/s11071-021-06644-4.
- [2] Rodrigo T Fontes e Marcio Eisenkraft. “A digital bandlimited chaos-based communication system”. Em: **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation** 37 (2016), pp. 374–385.
- [3] Vinicius S. Borges e Marcio Eisenkraft. “A filtered Henon map”. Em: **Chaos, Solitons and Fractals** 165 (dez. de 2022), p. 112865. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112865.
- [4] Alan V. Oppenheim e Ronald W. Schaffer. **Discrete-Time Signal Processing**. 3rd. Prentice Hall Press, 2009.
- [5] Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer e James A. Yorke. **Chaos**. Textbooks in Mathematical Sciences. Springer New York, 27 de set. de 2000. 632 pp. ISBN: 0387946772.