Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análise de uma Formulação de Elementos Finitos Estabilizada-Regularizada para Fluidos Pseudoplásticos com Tensão Limite

Daiana Soares Barreiro[1] José Karam Filho[2] Abimael F. D. Loula[3]
LNCC, Petrópolis, RJ
Cristiane O. Faria[4]
UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. Neste trabalho, é apresentada uma formulação mista estabilizada-regularizada de elementos finitos nas variáveis primais, para escoamentos incompressíveis de fluidos pseudoplásticos com tensão limite do tipo Herschel-Bulkley (viscoplástico não-linear). A formulação é construída com base no método de lagrangeano aumentado-regularizado e num método de estabilização via mínimos quadrados, usando interpolações contínuas para a velocidade e descontínuas para a pressão. Uma análise de estabilidade é apresentada estabelecendo-se uma condição suficiente em função dos parâmetros de estabilização e regularização.

Palavras-chave. Análise Numérica, Elementos Finitos Estabilizados, Pseudoplasticidade.

1 Introdução

A pseudoplasticidade é um dos efeitos mais encontrados em escoamentos de fluidos não newtonianos e se caracteriza pela não linearidade entre o tensor de tensões e o tensor taxa de deformação. A equação constitutiva mais comumente aceita como um bom modelo, e pela relativa simplicidade, é uma relação de potência entre aqueles dois tensores (power-law). Definindo uma viscosidade aparente pode-se introduzi-la no contexto da teoria de fluidos generalizados e gerar, para escoamentos não convectivos, um tipo de problema de Stokes generalizado [2]. Devido ao caráter não-linear desses modelos, só há soluções analíticas para poucos casos particulares e a alternativa são métodos numéricos. Uma dificuldade adicional quando se trata de escoamentos incompressíveis é a restrição interna de divergência nula, que também ocorre nos casos lineares, e para o que os métodos clássicos podem gerar instabilidades. Para superar essas limitações, [8] propuseram um método estável de elementos finitos mistos para o problema linear acomodando igual ordem para as variáveis e [2] generalizaram essa formulação para o caso de fluidos pseudoplásticos obtendo matematicamente através da versão discreta do teorema de Scheurer [9], que é uma generalização do teorema de Brezzi [3], as faixas de estabilização e alcançando as mesmas vantagens do caso linear. Fluidos que começam a se mover quando a tensão cisalhante é maior que um valor crítico são chamados de fluidos com tensão limite (viscoplásticos), para os quais duas regiões podem ser distinguidas: uma região fluente, onde o comportamento é como o de um fluido, newtoniano ou não newtoniano, e uma região rígida, comportamento de corpo rígido, [10]. O modelo constitutivo mais antigo para os viscoplásticos é o de Bingham [1], que possui uma descontinuidade quando a taxa de

[1]daianasb@posgrad.lncc.br
[2]jkfi@lncc.br
[3]aloc@lncc.br
[4]cofaria@ime.uerj.br

cisalhamento é zero, dificultando a obtenção de solução analítica ou via métodos numéricos. Matematicamente o modelo prevê uma curva linear da tensão com a taxa de deformação a partir de um valor limite, abaixo do qual não há escoamento. Dois tipos de abordagem podem ser destacados: formulações que introduzem a restrição de descontinuidade no funcional lagrangeano através de um multiplicador (com regularização, por exemplo), gerando um funcional lagrangeano aumentado [7]; ou regularização do termo da viscosidade efetiva diretamente, que encontram dificuldades para prover soluções precisas, especialmente para altos valores da tensão limite, [5]. Para superar estas limitações, [5] introduziram um método de elementos finitos mistos estabilizados-regularizados, incluindo um multiplicador com regularização do termo da tensão limite na formulação estável de [8]. Analisaram matematicamente e obtiveram resultados numéricos estáveis para números de Bingham extremamente altos, superando os métodos de até então. Além do modelo idealizado de Bingham, muitos problemas práticos possuem propriedades que se ajustam ao modelo de Herschel-Bulkley [10] que, diferentemente do de Bingham, prevê escoamento pseudoplástico (não-linear) a partir de uma tensão limite. Fluidos de Herschel-Bulkley apresentam todas as dificuldades apresentadas pelos fluidos pseudoplásticos puros e pelos fluidos viscoplásticos ideais de Bingham. Neste trabalho, com base nos métodos de [2] para fluidos pseudoplásticos e de [5] para fluidos de Bingham, uma nova formulação é apresentada para um problema geral pseudoplástico com tensão limite, material de Herschel-Bulkley, através de uma formulação estabilizada-regularizada, com a introdução de um funcional regularizador aumentado. Uma análise matemática para a formulação é apresentada, obtendo-se uma condição suficiente de estabilidade em função dos parâmetros de estabilização.

2 Problema Modelo

Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$ com contorno suave Γ. Consideraremos o problema de escoamento lento, incompressível e estacionário governado por: $-\text{div}\,\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}$ em Ω, onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de Cauchy para um fluido, $\mathbf{f}$ as forças de corpo e div $\boldsymbol{\sigma}$ é a divergência de $\boldsymbol{\sigma}$. A equação governante está sujeita à restrição de incompressibilidade div $\mathbf{u} = 0$ em Ω, onde $\mathbf{u}$ é o campo de velocidade. O modelo de Herschel e Bulkley descreve, de uma forma mais geral, certos fluidos não newtonianos e apresenta uma dependência tensão-taxa deformação não-linear na região de escoamento. É importante notar este modelo constitutivo prevê quando a tensão de cisalhamento é menor que a tensão limite. Assim, escrevendo em termos da viscosidade aparente (μ_a) o modelo de Herschel-Bulkley, temos

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) = \left(\frac{\tau_y}{|\epsilon(\mathbf{u})|} + K_H \, |\epsilon(\mathbf{u})|^{\alpha - 2} \right) \epsilon(\mathbf{u}) = \mu_a(\mathbf{u}) \epsilon(\mathbf{u}), \tag{1}$$

onde τ_y é a tensão limite, K_H é o parâmetro de consistência, α é o índice da lei de potência, $\epsilon(\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u})/2$ é o tensor taxa de deformação e $\mu_a(\mathbf{u}) = \mu(\mathbf{u})$, para simplificar. A partir desta equação, observamos que este modelo prevê uma relação não-linear entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação. Para este modelo assumiremos que a viscosidade μ varia com o tensor da taxa de deformação, definindo uma função de viscosidade aparente $\mu\colon [s_0, s_\infty] \longrightarrow \mathbb{R}_+$, como uma aplicação contínua regular, dada por $\mu(s) = \mu_0 s^{\alpha-2}$, onde $\mu_0 > 0$ em $\mathbb{R}$ é o parâmetro de consistência e $\alpha \in]1, 2[$ é o índice de potência. As constantes positivas s_0 e s_∞ representam os limites finitos da taxa de deformação, gerando os platôs de viscosidade μ_0 e μ_∞ para baixa e alta taxa de deformação, respectivamente, tal que $0 < \mu_\infty \leq \mu(s) \leq \mu_0$. Nota-se que se $\alpha = 2$ trata-se de fluido newtoniano; se $1 < \alpha < 2$ é o caso de *pseudoplásticos* e se $2 < \alpha < \infty$ é o caso de *dilatantes*. A partir das equações de conservação do momento linear, da continuidade e da relação constitutiva, obtemos o problema de Stokes generalizado considerando o modelo de

Herschel-Bulkley. Assim, dados $\mathbf{f}$ e $\overline{\mathbf{u}}$, determinar $\{\mathbf{u}, p\}$ tal que

$$-\mathrm{div}\,(\mu(\mathbf{u})\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})) + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{3}$$

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} \quad \text{em} \quad \Gamma, \tag{4}$$

onde foi considerada condição de Dirichlet em Γ e p é a pressão hidrostática;

3 Formulação Mista Estabilizada-Regularizada

Seja o espaço, $L^2(\Omega) = \{u | u \text{ mensurável e } \int_\Omega |u|^2 \; d\Omega < \infty\}$, com produto interno $(u, v) = \int_\Omega uv \; d\Omega, \; \forall u, v \in L^2(\Omega)$ e com a norma usual $\|u\|^2 = \|u\|_0^2 = \int_\Omega |u|^2 \; d\Omega = (u, u), \; \forall u \in L^2(\Omega)$. Seja o espaço $H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega); \; u = 0 \text{ em } \Gamma\right\}$, com $H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \mid \nabla u \in L^2(\Omega)\right\}$ e a norma usual $\|u\|_1^2 = \|u\|_0^2 + \|\nabla u\|_0^2, \; \forall u \in H^1(\Omega)$. Sejam V e W os espaços para velocidade e pressão definidos por: $V = \left\{v \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right\}$ e $W = \left\{p \in L^2(\Omega), (p, 1) = 0\right\}$, com suas respectivas normas, $\|v\|_V = \|v\|_1$ e $\|p\|_W = \|p\|_0$. Seja Ω um domínio poligonal discretizado por uma malha clássica uniforme de elementos finitos com N_e elementos. Sendo $S_h^k(\Omega)$ o espaço de elementos finitos de polinômios contínuos em Ω de grau k, classe C^0, e $Q_h^l(\Omega)$ o espaço de elementos finitos de polinômios descontínuos em Ω de grau l, classe C^{-1}, definimos os espaços de aproximação, $\mathbf{V}_h^k = (S_h^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^n$ e $\mathbf{W}_h^l = Q_h^l(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, para a velocidade $\mathbf{u}_h$ com interpolações contínuas e para a pressão p_h com interpolações descontínuas, respectivamente. Assim, com base na formulação estabilizada de [2] para problemas não-lineares sem tensão limite e da formulação regularizada de [5], construímos a seguir a formulação variacional estabilizada-regularizada consistente para escoamento de fluidos pseudoplásticos com tensão limite. Para facilitar as análises e o uso da condição LBB, reescreveremos a pressão descontínua como: $p_h = p_h^* + \overline{p}_h$, com $p_h^* \in \mathbf{W}_h^{*l} = \left\{p_h^* \in L^2(\Omega) \colon \int_{\Omega^e} p_h^* \; d\Omega^e = 0; \; \nabla p_h^e = \nabla p_h^{e*}\right\}$, onde $\mathbf{W}_h^{*l}$ é o subespaço da pressão com média nula em cada elemento e $\overline{p}_h \in \overline{\mathbf{W}}_h^l = \left\{\overline{p}_h \in L^2(\Omega) \colon \nabla \overline{p}_h^e = 0, \; \overline{p}_h^e = \int_{\Omega^e} p_h^e \; d\Omega^e / \int_{\Omega^e} d\Omega^e\right\}$, sendo $\overline{\mathbf{W}}_h^l$ o subespaço da função constante por parte, onde p_h^e é a restrição de p_h no elemento Ω^e. Com isso, escreveremos o Problema PG_{hb}^*:

Problema PG_{hb}^*: Dado $\mathbf{f} \in \mathbf{V}'$, encontrar $\{\mathbf{u}_h, p_h^*, \overline{p}_h\} \in \mathbf{V}_h^k \times \mathbf{W}_h^{*l} \times \overline{\mathbf{W}}_h^l$, tal que

$$\left(A_h^*\left(U_h^*\right), V_h^*\right) + j_\eta(\mathbf{v}_h) + B_h\left(\overline{p}_h, \mathbf{v}_h\right) = F_h^*(V_h^*) \quad \forall \; \{\mathbf{v}_h, q_h^*\} \in \mathbf{V}_h^k \times \mathbf{W}_h^{*l}, \tag{5}$$

$$B_h\left(\overline{q}_h, \mathbf{u}_h\right) = 0 \qquad \forall \quad \overline{q}_h \in \overline{\mathbf{W}}_h^l, \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

onde
$$\begin{aligned}\left(A_h^*\left(U_h^*\right), V_h^*\right) = {} & (\mu(\mathbf{u}_h)\epsilon(\mathbf{u}_h), \epsilon(\mathbf{v}_h)) + B_h\left(p_h^*, \mathbf{v}_h\right) \\ & + \delta_2\vartheta\left(\mathrm{div}\mathbf{u}_h, \mathrm{div}\mathbf{v}_h\right) + B_h\left(q_h^*, \mathbf{u}_h\right) \\ & + \frac{\delta_1 h^2}{\vartheta}\left(-\Delta_\mu \mathbf{u}_h + \nabla p_h^*, -\Delta_\mu \mathbf{v}_h + \nabla q_h^*\right)_h,\end{aligned} \tag{8}$$

$$j_\eta(\mathbf{v}_h) = \tau_y \int_\Omega \frac{\epsilon(\mathbf{u}_h) \cdot \epsilon(\mathbf{v}_h)}{\sqrt{|\epsilon(\mathbf{u}_h)|^2 + \eta^2}} d\Omega. \tag{9}$$

$$B_h\left(p_h^*, \mathbf{v}_h\right) = -\left(p_h^*, \mathrm{div}\mathbf{v}_h\right)_h \; , \;\; B_h\left(\overline{p}_h, \mathbf{v}_h\right) = -\left(\overline{p}_h, \mathrm{div}\mathbf{v}_h\right)_h, \tag{10}$$

$$F_h^*(V_h^*) = \mathbf{f}(\mathbf{v}_h) + \frac{\delta_1 h^2}{\vartheta}\left(\mathbf{f}, -\Delta_\mu \mathbf{v}_h + \nabla q_h^*\right)_h, \tag{11}$$

com $(\psi, \phi)_h = \sum_{i=1}^{N_e} \int_{\Omega^i} \psi \cdot \phi \; dx$, h o parâmetro de malha, $\delta_1, \delta_2 > 0$ como parâmetros de estabilidade e ϑ um parâmetro dimensional. A norma induzida pelo produto interno $(\cdot, \cdot)_h$ será definida como $\|\cdot\|_h$. Para simplificar a notação adotaremos a definição: $\Delta_\mu \mathbf{u} = \mathrm{div}(\mu(\mathbf{u})\epsilon(\mathbf{u}))$, onde $\mu(\mathbf{u})$ não é constante. Nota-se que quando $\delta_1 = \delta_2 = 0$ o Problema PG_{hb} se reduz à formulação de Galerkin que pode exibir trancamento da velocidade e oscilações espúrias da pressão. Para o método de Galerkin, k e l devem ter ordens diferentes [6]. A não linearidade deste problema é introduzida pela lei da viscosidade dada por uma função contínua e limitada, $\mu\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, com $\mu_\infty \le \mu(s) \le \mu_0$, onde μ_0 e μ_∞ são reais positivos que limitam a viscosidade aparente a baixas e altas taxas de deformação, respectivamente. Identificando o subespaço $\overline{K}_h \subset \mathbf{V}_h$ como $\overline{K}_h = \left\{\mathbf{v}_h \in V_h \colon B_h\left(\overline{q}_h, \mathbf{v}_h\right) = 0,\ \forall \overline{q}_h \in \overline{W}_h\right\}$, podemos considerar a seguinte forma reduzida: $\left(\overline{A}_h^*\left(U_h^*\right), V_h^*\right) = \left(A_h^*\left(U_h^*\right), V_h^*\right) + j_\eta(\mathbf{v}_h)$.

4 Análise Numérica

Considerando a limitação da viscosidade e do seu gradiente, os próximos resultados propõem generalizações da estimativa inversa de [4], que será chave para a análise matemática apresentada.

Lema 4.1. *(Estimativa inversa generalizada) Seja $\mu(s)$, $s \in \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada, tal que $\mu_\infty \le \mu(s) \le \mu_0$ e $\|\nabla \mu(s)\|_0 \le M$. Existe uma constante positiva C, independente de h, tal que $h\|\Delta_\mu \boldsymbol{u}_h\|_0 \le C\|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}_h)\|_0$, onde $C = \mu_0 C_h + M$. (Demonstração: Ver [2]).*

Lema 4.2. *Assumindo as considerações do Lema 4.1, existe uma constante $C_l > 0$, tal que $h\| -\Delta_\mu \boldsymbol{u}_h + \Delta_\mu \boldsymbol{v}_h\|_0 \le C_l\|\epsilon(\boldsymbol{u}_h) - \epsilon(\boldsymbol{v}_h)\|_0$, $\forall \boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h^k$ com $h > 0$. A constante C_l é dada por: $C_l = 4\left[(\mu_0^2 C_h^2 + M^2) + (1 + C_h^2)M^2 C_K^2 \sup_{\mathbf{v_h}\in\mathbf{V}_h^k} \|\varepsilon(\mathbf{v_h})\|_0^2\right]$, onde C_K é a constante de Körn. (Demonstração: Ver [2]).*

A fim de lidar com os parâmetros de malha que surgem das estimativas inversas, definimos uma nova norma, dependente da malha, equivalente a norma espaço produto $\|U_h\|_\Pi^2 = \|u\|_1^2 + \|p\|_0^2$:

Definição 4.1. *Seja $\|U_h\|_h = \|U_h\| + h\left(\|\Delta \mathbf{u_h}\|_0 + \|\epsilon(\mathbf{u_h})\|_0 + \|\nabla p_h\|_0\right)$, com $h > 0$ o parâmetro de malha, uma norma dependente da malha sobre o espaço $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ equivalente à norma do espaço produto $\boldsymbol{V}_h^k \times \boldsymbol{W}_h^k$, com $\|U_h\|_\Pi \le \|U_h\|_h \le \rho\|U_h\|_\Pi\ \forall\ U_h \in \boldsymbol{V}_h^k \times \boldsymbol{W}_h^k$, onde $\rho = 1 + max\{C+1, \omega\}$ e ω é constante da estimativa inversa para a pressão, [2].*

Verifica-se, então, as hipóteses do teorema de Scheurer que estabelece as condições de existência e unicidade para problemas não-lineares, através dos teoremas a seguir para o Problema PG_{hb}^*.

Teorema 4.1. *(Continuidade de $(\overline{A}_h^*(\cdot), \cdot)$). Existe uma constante positiva γ_c, independente de h, tal que $|(\overline{A}_h^*(U^*) - \overline{A}_h^*(V_h^*), U_h^* - V_h^*)| \le \gamma_c\|U^* - V_h^*\|_h\ \|U_h^* - V_h^*\|_\Pi$, para todo $U^* \in H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ e $U_h^*, V_h^* \in \boldsymbol{V}_h^k \times \boldsymbol{W}_h^{*l}$.*

Demonstração. Usando a desigualdade triangular na forma bilinear $(\overline{A}_h^*(U_h^*), V_h^*)$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\left(\overline{A}_h^*(U^*) - \overline{A}_h^*(V_h^*), U_h^* - V_h^*\right)\right| &\le |(\mu(\mathbf{u})\epsilon(\mathbf{u}) - \mu(\mathbf{v}_h)\epsilon(\mathbf{v}_h), \epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h))| \\
&+ |B_h(p^* - q_h^*, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h)| + |B_h(p_h^* - q_h^*, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h)| \\
+ \frac{\delta_1 h^2}{\vartheta}&\left|(\Delta_\mu \mathbf{u} - \Delta_\mu \mathbf{v}_h + \nabla(p^* - q_h^*), \Delta_\mu \mathbf{u}_h - \Delta_\mu \mathbf{v}_h + \nabla(p_h^* - q_h^*))\right| \\
+ \delta_2\vartheta\,|(\mathrm{div}\mathbf{u} - \mathrm{div}\mathbf{v}_h, \mathrm{div}\mathbf{u}_h - \mathrm{div}\mathbf{v}_h)| &+ \left|\tau_y \int_\Omega \frac{[\epsilon(\mathbf{u}) - \epsilon(\mathbf{v}_h)]\cdot[\epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h)]}{\sqrt{|\epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h)|^2 + \eta^2}} d\Omega\right| \qquad (12)
\end{aligned}$$

Considerando o termo da tensão limite, da condição de regularidade sobre $|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})|$ e da limitação $C_1 \leq |\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_h) - \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{v}_h)| \leq C_2$, ficamos com o seguinte resultado

$$\tau_y \int_\Omega \frac{|\epsilon(\mathbf{u}) - \epsilon(\mathbf{v}_h)| \cdot |\epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h)|}{\inf \sqrt{|\epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h)|^2 + \eta^2}} d\Omega \leq \frac{\tau_y}{\sqrt{C_1^2 + \eta^2}} \int_\Omega |\epsilon(\mathbf{u}) - \epsilon(\mathbf{v}_h)| \cdot |\epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h)| \, d\Omega \quad (13)$$

Da continuidade de $(\mu(\mathbf{u})\epsilon(\mathbf{u}) - \mu(\mathbf{v}_h)\epsilon(\mathbf{v}_h), \epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h))$ [7], da desigualdade $\frac{1}{\sqrt{n}} \|\mathrm{div}\mathbf{u}_h\|_0 \leq \|\epsilon(\mathbf{u}_h)\|_0 \leq \|\mathbf{u}_h)\|_1$, do Lema 4.2 e agrupando os termos, temos

$$\begin{aligned}\left| \left(\overline{A}_h^* \left(U^* \right) - \overline{A}_h^* \left(V_h^* \right), U_h^* - V_h^* \right) \right| &\leq \max \left\{ K_H + n\vartheta\delta_2 + \frac{\tau_y}{\sqrt{C_1^2 + \eta^2}}, \sqrt{n}, \frac{\delta_1}{\vartheta} \right\} \\ &\Big[\left(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_1 + \|p^* - q_h^*\|_0 \right) + h \left(C_l \left(\|\Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{v}_h\|_0 + \|\epsilon(\mathbf{u}) - \epsilon(\mathbf{v}_h)\|_0 \right) + \|\nabla p^* - \nabla q_h^*\|_0 \right) \Big] \\ &\times \left(\|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_1 + \|p_h^* - q_h^*\|_0 \right). \quad (14)\end{aligned}$$

Como $\|U_h^*\|_\Pi = \|\mathbf{u}_h\|_1 + \|p_h^*\|_0$ e identificando os termos da norma $\|\cdot\|_h$, definida em 4.1, temos

$$\left| \left(\overline{A}_h^* \left(U^* \right) - \overline{A}_h^* \left(V_h^* \right), U_h^* - V_h^* \right) \right| \leq \gamma_c \|U^* - V_h^*\|_h \, \|U_h^* - V_h^*\|_\Pi, \quad (15)$$

onde $\gamma_c = \max \left\{ K_H + n\vartheta\delta_2 + \frac{\tau_y}{\sqrt{C_1^2 + \eta^2}}, \sqrt{n}, \frac{\delta_1}{\vartheta} \right\}$. □

Teorema 4.2. *(Coercividade de $(\overline{A}_h^* (\cdot), \cdot)$). Existe uma constante positiva γ_e, independente de h, tal que $\left| \left(\overline{A}_h^* \left(U_h^* \right) - \overline{A}_h^* \left(V_h^* \right), U_h^* - V_h^* \right) \right| \geq \gamma_e \|U_h^* - V_h^*\|_\Pi^2$, para todo $U_h^*, V_h^* \in \boldsymbol{V}_h^k \times \boldsymbol{W}_h^{*l}$.*

Demonstração. Da definição da forma $(\overline{A}_h^* (\cdot), \cdot)$ podemos escrever

$$\begin{aligned}\left(\overline{A}_h^* \left(U_h^* \right) - \overline{A}_h^* \left(V_h^* \right), U_h^* - V_h^* \right) &\geq (\mu(\mathbf{u}_h)\epsilon(\mathbf{u}_h) - \mu(\mathbf{v}_h)\epsilon(\mathbf{v}_h), \epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h)) \\ &+ \delta_2\vartheta \|\mathrm{div}\mathbf{u}_h - \mathrm{div}\mathbf{v}_h\|_0^2 + 2B_h \left(p_h^* - q_h^*, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h \right) + \frac{\delta_1 h^2}{\vartheta} \| - \Delta_\mu \mathbf{u}_h + \Delta_\mu \mathbf{v}_h + \nabla(p_h^* - q_h^*)\|_0^2 \\ &+ \tau_y \int_\Omega \frac{[\epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h)] \cdot [\epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h)]}{\sqrt{|\epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h)|^2 + \eta^2}} \, d\Omega \quad (16)\end{aligned}$$

Considerando o termo da tensão limite, como $C_1 \leq |\epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h)| \leq C_2$ e usando a elipticidade do termo $(\mu(\mathbf{u}_h)\epsilon(\mathbf{u}_h) - \mu(\mathbf{v}_h)\epsilon(\mathbf{v}_h), \epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h))$, como em [7], temos

$$\begin{aligned}&\left(\overline{A}_h^* \left(U_h^* \right) - \overline{A}_h^* \left(V_h^* \right), U_h^* - V_h^* \right) \geq \gamma K_H \, \|\epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h)\|_0^2 + \delta_2\vartheta \|\mathrm{div}\mathbf{u}_h - \mathrm{div}\mathbf{v}_h\|_0^2 \\ &+ 2B_h \left(p_h^* - q_h^*, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h \right) + \frac{\delta_1 h^2}{\vartheta} \| - \Delta_\mu \mathbf{u}_h + \Delta_\mu \mathbf{v}_h + \nabla(p_h^* - q_h^*)\|_0^2 + \frac{\tau_y}{\sqrt{C_2^2 + \eta^2}} \|\epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h)\|_0^2. \quad (17)\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Young: $ab \leq \frac{\xi a^p}{p} + \frac{\xi^{1-q} b^q}{q}$ e escolhendo $\xi = \frac{1}{\delta_2 \vartheta}$ e $p = q = 2$, temos

$$\begin{aligned}&\left(\overline{A}_h^* \left(U_h^* \right) - \overline{A}_h^* \left(V_h^* \right), U_h^* - V_h^* \right) \geq \gamma K_H \, \|\epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h)\|_0^2 \\ &+ \frac{\delta_1 h^2}{\vartheta} \| - \Delta_\mu \mathbf{u}_h + \Delta_\mu \mathbf{v}_h + \nabla(p_h^* - q_h^*)\|_0^2 - \frac{1}{\delta_2 \vartheta} \|p_h^* - q_h^*\|_0^2 + \frac{\tau_y}{\sqrt{C_2^2 + \eta^2}} \|\epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h)\|_0^2. \quad (18)\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young para um $\varphi > 0$ e sendo r_1, $r_2 > 0$, tais que $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} = 1$, temos

$$\begin{aligned}\left(\overline{A}_h^*\left(U_h^*\right) - \overline{A}_h^*\left(V_h^*\right), U_h^* - V_h^*\right) \geq{}& \frac{\gamma K_H}{r_1}\|\epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h)\|_0^2 + \frac{\gamma K_H}{r_2}\|\epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h)\|_0^2 \\ &- \frac{1}{\delta_2\vartheta}\|p_h^* - q_h^*\|_0^2 + \frac{\delta_1 h^2}{\vartheta}\left(1 - \frac{1}{\varphi}\right)\| - \Delta_\mu \mathbf{u}_h + \Delta_\mu \mathbf{v}_h\|_0^2 \\ &+ \frac{\delta_1 h^2}{\vartheta}\left(1 - \varphi\right)\|\nabla(p_h^* - q_h^*)\|_0^2 + \frac{\tau_y}{\sqrt{C_2^2 + \eta^2}}\|\epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h)\|_0^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Do Lema 4.2 e escolhendo $\varphi = \dfrac{\delta_1 r_2 C_l}{\gamma K_H \vartheta + \delta_1 r_2 C_l}$, temos

$$\begin{aligned}\left(\overline{A}_h^*\left(U_h^*\right) - \overline{A}_h^*\left(V_h^*\right), U_h^* - V_h^*\right) \geq{}& \frac{\gamma K_H}{r_1}\|\epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h)\|_0^2 + \frac{\tau_y}{\sqrt{C_2^2 + \eta^2}}\|\epsilon(\mathbf{u}_h) - \epsilon(\mathbf{v}_h)\|_0^2 \\ &- \frac{1}{\delta_2\vartheta}\|p_h^* - q_h^*\|_0^2 + h^2\frac{\gamma K_H \delta_1}{\vartheta\gamma + \delta_1(r_2 + C_l)}\|\nabla(p_h^* - q_h^*)\|_0^2. \end{aligned} \tag{20}$$

Da desigualdade de Poincaré, $h^2\|\nabla q_h^*\|_0^2 \geq \gamma_p\|q_h^*\|_0^2$ e da desigualdade de Körn, temos

$$\left(\overline{A}_h^*\left(U_h^*\right) - \overline{A}_h^*\left(V_h^*\right), U_h^* - V_h^*\right) \geq \gamma_e\left(\|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_1^2 + \|p_h^* - q_h^*\|_0^2\right) \tag{21}$$

com $\gamma_e = \min\left\{\dfrac{C\gamma K_H}{r_1} + \dfrac{C\tau_y}{\sqrt{C_2^2 + \eta^2}}, \dfrac{\gamma K_H \delta_1 \gamma_p}{\vartheta\gamma K_H + \delta_1(r_2 + C_l)} - \dfrac{1}{\delta_2\vartheta}\right\}$, desde que

$$\left[\frac{\gamma k_0 \delta_1 \gamma_p}{\vartheta\gamma k_0 + \delta_1(r_2 + C_l)} - \frac{1}{\delta_2\vartheta}\right] > 0 \tag{22}$$

□

A desigualdade (22) apresenta uma condição suficiente para a estabilidade do Problema PG_{hb}^* e esta relação entre os parâmetros de estabilidade δ_1, δ_2 fornece um critério para a escolha destes. Basta, por exemplo, escolher δ_1 e estimar através de (22) o parâmetro δ_2. Em alguns casos é possível estimar as constantes que surgem na análise para alguns problemas em particular [8].

Teorema 4.3. *(Continuidade de $B_h(\cdot,\cdot)$). Existe uma constante positiva γ_B, independente de h, tal que $B_h\left(\overline{p} - \overline{p}_h, \boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h\right) \leq \gamma_B\|\overline{p} - \overline{p}_h\|_0\ \|U_h^* - V_h^*\|_\Pi$, para todo $\overline{p}_h \in \overline{\boldsymbol{W}}_h^l$ e $U_h^*, V_h^* \in \boldsymbol{V}_h^k \times \boldsymbol{W}_h^{*l}$.*

Demonstração. A continuidade de $B_h(\cdot,\cdot)$ deriva da aplicação direta da desigualdade de Hölder-Schwarz e do uso da desigualdade $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\|\text{div}\mathbf{u}_h\|_0 \leq \|\epsilon(\mathbf{u}_h)\|_0 \leq \|\mathbf{u}_h\|_1$, onde obtemos $\gamma_B = \sqrt{n}$. □

Teorema 4.4. *(Condição LBB para $B_h(\overline{q}_h, \boldsymbol{v}_h)$). Para todo $\overline{V}_h \in \boldsymbol{V}_h^k \times \overline{\boldsymbol{W}}_h^l$ com $k \geq 2$, existe uma constante positiva β_h, independente de h, tal que $\displaystyle\sup_{\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h} \frac{|B_h(\overline{q}_h, \boldsymbol{v}_h)|}{\|\boldsymbol{v}_h\|_1} \geq \beta_h\|\overline{q}_h\|_0$, $\forall \overline{q}_h \in \overline{\boldsymbol{W}}_h^l$.*

Demonstração. Este resultado pode ser visto em [6]. □

Com isso, verificou-se as hipóteses do teorema de Scheurer para o problema PG_{hb}^*, estabelecendo a existência e a unicidade da solução.

5 Conclusões

Neste trabalho, foi apresentada uma formulação mista de elementos finitos estabilizada e regularizada, com interpolação contínua para a velocidade e descontínua para a pressão, para um problema de escoamento estacionário incompressível não-linear que modela fluidos pseudoplásticos com tensão limite regidos pelas relações constitutivas do modelo de Herschel-Bulkley (viscoplástico não-linear). Desenvolveu-se uma análise matemática que comprovou a estabilidade dessa formulação, através da verificação das condições do Teorema de Scheurer que estabeleceu uma condição suficiente para relacionar os parâmetros de estabilização com o valor do limite de escoamento imposto pela restrição de desigualdade de Herschel-Bulkley. Foi possível aqui restringir a condição LBB à pressão constante por parte que facilita a satisfação da condição e transfere a responsabilidade com a condição de elipticidade para o operador não-linear modificado.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece a CAPES e os autores ao CNPq e FAPERJ pelo apoio financeiro.

Referências

[1] E. C. Bingham. **Fluidicity and Plasticity**. New York: McGraw-Hill, 1922.

[2] M. A. A. Bortoloti e J. F. Karam. “A Stabilized Finite Element Analysis for a Power-Law Pseudoplastic Stokes Problem”. Em: **Applicable Analysis** 95.2 (2016), pp. 467–482.

[3] F. Brezzi. “On The Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle-Point Problems Arising From Lagrange Multipliers”. Em: **Revue Française d’Automatique informatique et Recherche Opèrationnelle** 8.R-2 (1974), pp. 129–151.

[4] P. G. Ciarlet. **The Finite Element Method For Elliptic Problems**. NorthHolland, 1978.

[5] C. O. Faria e J. F. Karam. “A Regularized Stabilized Mixed Finite Element Formulation for Viscoplasticity of Bingham Type”. Em: **Comput.Math.with Appl.** 66 (2013), pp. 975–995.

[6] M. Fortin. “Old and New Finite Elments for Incompressible Flows”. Em: **Int. J. Numer. Methods Fluids** 1 (1981), pp. 347–431.

[7] R. Glowinski e A. Marroco. “Sur l’approximation par elements finis d’ordre un, et la resolution, par penalisation-dualite, d’une classe de problemes de Dirichlet non lineaires”. Em: **R.A.I.R.O Recherche Opérationnelle** R-2 (1975), pp. 41–76.

[8] J. F. Karam e A. F. D. Loula. “A Non-Standard Application of The BabuškaBrezzi Theory to Finite Element Analysis of Stokes Problem”. Em: **Comput.Appl.Math.** 10.3 (1991), pp. 243–262.

[9] B. Scheurer. “Existence et Approximation De Points Selles Pour Certains Problèmes Non Linéaires”. Em: **R.A.I.R.O Analyse Numérique** 11.4 (1977), pp. 369–400.

[10] A. H. P. Skelland. **Non-Newtonian Flow and Heat Transfer**. John Wiley&Sons, 1967.

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0023