Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Um estudo sôbre crescimento em peso do tambaquí com modelagem fuzzy

Rodney Carlos Bassanezi, **Michael Macedo Diniz**,
Depto de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP,
13083-859, Campinas, SP
E-mail: rodney@ime.unicamp.br, diniz@ime.unicamp.br,

Resumo: *Neste artigo estudamos o modelo de Von Bertalanffy aplicado ao crecimento em peso do Tambaqui. Trabalhamos com o modelo generalizado e determinamos o parâmetro de alometria atravês de um ajuste de curva que relaciona a idade do peixe com o seu peso. Analisamos o comportamento do ponto de inflexão da solução do modelo quando a condição inicial ou o parâmetro de alometria é fuzzy. No primeiro caso verificamos que o tempo de inflexão é fuzzy e o ponto de inflexão é crisp enquanto que no segundo caso, tanto o tempo de inflexão quanto o ponto de inflexão é fuzzy.*

Palavras-chave: *Ponto de inflexão fuzzy*

1 Exposição do Problema

Quando estudamos a variação em peso de animais, deparamos com o fato que existem intervalos de tempo onde o crescimento atinge um valor máximo. No caso de criação de animais como porcos e frangos, o abate está sempre relacionado com este ponto de crescimento máximo que corresponde ao máximo rendimento com menor custo.

Em muitos casos de crescimento em peso, verifica-se uma tendência de crescimento máximo quando se está próximo do amadurecimento das gônodas dos animais. As políticas de preservação ambiental, como no caso de peixes, é baseada no fato que um indivíduo só pode ser capturado após procriar pelo menos uma vez. Desta forma, o estudo de modelos matemáticos passou a ser essencial para se avaliar, de maneira adequada, estes pontos de crescimento máximo também denominados *pontos de inflexão.*

1.1 Modelos Determinísticos

Os modelos clássicos de crescimento em peso foram obtidos inicialmente por von Bertalanffy com o estudo de peixes e levam em consideração os processos de catabolismo e anabolismo. Assim, se $p(t)$ é o peso do animal no instante t, temos

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \alpha p^{\frac{2}{3}} - \beta p \\ p(0) = p_0 \text{ dado} \end{cases} \tag{1}$$

onde α é a taxa de catabolismo e β a taxa de anabolismo. Este modelo indica que o animal cresce proporcionalmente à sua pele, dado pela alometria do seu peso com sua área lateral na forma de $A \times p^{\frac{2}{3}}$, e perde peso devido a sua movimentação ou perda de energia.

Neste modelo (1) o ponto de crescimento máximo é dado quando $\frac{d^2p}{dt^2} = 0$, isto é,

$$\frac{d^2p}{dt^2} = \frac{2}{3}\alpha p^{-\frac{1}{3}}\frac{dp}{dt} - \beta\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dt}\left(\frac{2}{3}\alpha p^{-\frac{1}{3}} - \beta\right)$$

logo,

$$\frac{d^2p}{dt^2} = 0 \Longleftrightarrow p_{\text{inf}} = \frac{8}{27}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \tag{2}$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0054

Por outro lado, temos que o peso do animal se estabiliza quando $\frac{dp}{dt} = 0$, ou seja,

$$\frac{dp}{dt} = 0 \iff \alpha p^{\frac{2}{3}} - \beta p = 0 \iff p_\infty = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \tag{3}$$

logo, o peso máximo p_∞ é dado em função dos parâmetros α e β.

Assim, usando (3) na equação (2), podemos escrever

$$p_{\text{inf}} = \frac{8}{27} p_\infty$$

O problema de valor inicial (1) referente ao peso é dado por uma equação de Bernouli cuja solução é:

$$p(t) = \left[\frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\frac{\beta t}{3}}\right]^3$$

onde, $C = p_0^{\frac{1}{3}} - \frac{\alpha}{\beta} = \sqrt[3]{p_0} - \sqrt[3]{p_\infty}$. Quando $p_0 \approx 0$, temos

$$p(t) = p_\infty \left[1 - e^{-\frac{\beta t}{3}}\right]^3$$

O modelo de von Bertalanffy (1), desenvolvido para o crescimento de peixes, pode ser melhorado considerando-se uma alometria *peso* $-$ *área* mais apropiada para cada espécie e que pode ser traduzida no termo do catabolismo, isto é,

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \alpha p^\gamma - \beta p \\ p(0) = p_0 \end{cases} \tag{4}$$

onde p_0 é um valor conhecido.

Neste modelo do tipo von Bertalanffy mais geral, a solução é dada por:

$$p(t) = \left[\frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\beta(1-\gamma)t}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad \text{e} \quad p_\infty = \left[\frac{\alpha}{\beta}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \tag{5}$$

e $C = p_0^{(1-\gamma)} - p_\infty^{(1-\gamma)}$

Neste caso, o ponto de inflexão é dado por:

$$0 = \frac{d^2p}{dt^2} = \alpha\gamma p^{\gamma-1}\frac{dp}{dt} - \beta\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dt}\left[\alpha\gamma p^{\gamma-1} - \beta\right] \Longrightarrow p^{\gamma-1} = \left[\frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{\gamma}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

e portanto,

$$p_{\text{inf}} = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} p_\infty = (\gamma)^{1-\gamma}\, p_\infty \tag{6}$$

Quando se trata de crescimento de animais é fundamental estabelecer o instante em que se dá o crescimento máximo, isto é, o tempo onde se tem o ponto de inflexão do peso. No caso do modelo generalizado (4) podemos calcular o tempo onde se dá a inflexão da curva $p(t)$, considerando na solução (5) o valor de p_{inf} em (6).

Consideremos inicialmente o caso em que $p_0 \approx 0$. Assim,

$$\begin{aligned} (\gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}}\, p_\infty &= p_\infty \left[1 + \left(\left(\frac{p_0}{p_\infty}\right)^{1-\gamma} - 1\right) e^{-\beta(1-\gamma)t_{\text{inf}}}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \iff \\ \gamma - 1 &= \left[\left(\frac{p_0}{p_\infty}\right)^{1-\gamma} - 1\right] e^{-\beta(1-\gamma)t_{\text{inf}}} \iff \\ \ln\left[\frac{\gamma - 1}{\left(\frac{p_0}{p_\infty}\right)^{1-\gamma} - 1}\right] &= -\beta\,(1-\gamma)\,t_{\text{inf}} \end{aligned}$$

Portanto,

$$t_{\mathrm{inf}} = \frac{\ln\left[\frac{\gamma-1}{\left(\frac{p_0}{p_\infty}\right)^{1-\gamma}-1}\right]}{(1-\gamma)\,\beta} = t_{\mathrm{inf}}(p_0) \tag{7}$$

A relação acima nos fornece o tempo de inflexão em função do ponto inicial. Observamos que num caso de aplicação prática podemos simular o valor de β quando se tem o valor do tempo de inflexão que, geralmente é quando o animal procria pela primeira vez.

2 Método

Na maioria das vezes ocorrem imprecisões nas medidas, que devem ser tomadas rapidamente para a soltura dos animais. De qualquer modo, os modelos determinísticos empregados para se estabelecer o crescimento destes animais, oferecem *soluções exatas* apesar dos parâmetros serem sempre imprecisos pois são determinados com alguma simulação ou algum tipo de média. Desta forma, via de regra, as soluções exatas não são reais e/ou adequadas para uma previsão de resultados.

A imprecisão dos dados ou mesmo seu conhecimento parcial podem ser modelados quando consideramos as equações variacionais munidas de parâmetros imprecisos, isto é, quando utilizamos números fuzzy para avaliar os parâmetros.

Os modelos fuzzy têm a vantagem de levar em consideração a intuição do avaliador que pode se juntar aos dados quando existirem. Por exemplo, se quisermos um modelo do crescimento de determinado peixe e tivermos poucos dados coletados de quando este peixe era *pequeno,* podemos inferir intuitivamente um intervalo para o tamanho de recém nascidos. Cada valor neste intervalo de peso inicial $\widehat{p}_0$ tem em correspondência um grau de confiança deste valor como sendo verdadeiro. A pergunta agora é a seguinte: "se não temos precisão na condição inicial podemos fazer mesmo assim uma previsão do peso no futuro?". A teoria dos conjuntos fuzzy apresentada por Zadeh no início de 1965 oferece um tratamento matemático a termos linguísticos tais como "aproximadamente", "em torno de", "pequeno", "bonito" etc.

Definição 2.1. *Consideremos os números reais $\mathbb{R}$, dizemos que um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é um número fuzzy com função grau de pertinência $\mu_A : \mathbb{R} \to [0,1]$ e indicamos por $\widehat{A}$ quando:*

1. Existe $x_0 \in A$, tal que $\mu_A(x_0) = 1$;

2. O suporte do conjunto, $suppA = \{x : \mu_A(x) > 0\}$ é limitado;

3. Os $\alpha-$níveis de A são intervalos fechados, isto é, $\{x : \mu_A(x) \geq \alpha\} = [A]^\alpha$ é um intervalo fechado para todo $\alpha \in [0,1]$.

As definições das operações com números fuzzy podem ser encontradas em [1].

O conceito de função grau de pertinência estende naturalmente o conceito clássico de função característica de um conjunto. A extensão de uma função real $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por

Definição 2.2. *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, a Extensão de Zadeh de f é a função $\widehat{f} : \widehat{A} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ tal que a função grau de pertinência de $\widehat{f}(\widehat{A}) = \widehat{f}(A)$ é dada por*

$$\varphi_{\widehat{f}(A)} = \left\{ \begin{array}{l} \sup_{f^{-1}(z)} \varphi_A(x) \ \ se \ x = f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 \ \ se \ \ f^{-1}(z) = \emptyset \end{array} \right\}$$

onde, $(\mathcal{F}\mathbb{R})$ é o conjunto dos sub conjuntos fuzzy de $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1. *Nguyen [5] - Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então a extensão de Zadeh $\widehat{f} : \widehat{A} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ está bem definida e,*

$$\left[\widehat{f}(A)\right]^\alpha = f([A]^\alpha) = \{f(x) : x \in [A]^\alpha\,,\ \forall \alpha \in [0,1] \ \ e\ A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})\}$$

Podemos agora definir o que entendemos por *fluxo fuzzy.*

Definição 2.3. *[4] Dada uma condição inicial imprecisa na forma de um número fuzzy* $\widehat{x}_0$, *e um campo de direções* $f = f(x)$, *com* $x \in supp\ \widehat{x}_0 \subset \mathbb{R}^n$, *o fluxo fuzzy é o conjunto fuzzy* $\widehat{\varphi}(\widehat{x}_0, t) : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, *dado pela Extensão de Zadeh do fluxo determinístico* $\varphi(x_0, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *gerado pelo campo vetorial* f, *obtido do problema de Cauchy autônomo:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)) \\ x_0 = x(0) \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{8}$$

Obs.: Estamos supondo que a função f satisfaça algum critério que garanta existência e unicidade de solução de (8). Um sistema fuzzy, será denotado por

$$\begin{cases} \frac{d\widehat{x}}{dt} = f(x(t)) \\ \widehat{x}_0 = \widehat{x}(0) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \end{cases} \tag{9}$$

Pela continuidade de $\varphi(x_0, t)$ com relação à condição inicial x_0, a igualdade

$$[\widehat{\varphi}(\widehat{x}_0, t)]^\alpha = \varphi([\widehat{x}_0]^\alpha, t)$$

é satisfeita para todo $\alpha \in [0, 1]$ .Desta forma, a trajetória determinada por $\widehat{\varphi}(\widehat{x}_0, t)$ consiste de uma família de trajetórias determinísticas dadas por $\varphi(x_0, t)$. Para cada $\overline{x}_0 \in \widehat{x}_0$, o grau de pertinência da trajetória $\varphi(\overline{x}_0, t)$ em $\widehat{\varphi}(\widehat{x}_0, t)$ é igual ao grau de pertinência de $\overline{x}_0$ em $\widehat{x}_0$, isto é,

$$\mu_{\widehat{\varphi}(\widehat{x}_0,t)}(\varphi(\overline{x}_0, t)) = \mu_{\widehat{x}_0}(\overline{x}_0)$$

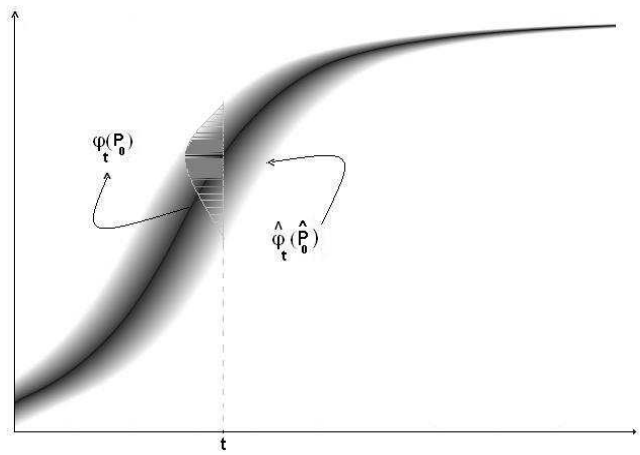

Figura 1: Fluxo determinístico e fluxo fuzzy

Podemos dizer que a trajetória proveniente do modelo determinístico é a *preferida* pois seu grau de pertinência no fluxo fuzzy vale 1.

Quando a subjetividade ou imprecisão aparece em algum parâmetro da função de estado $f(x)$, devemos extender o sistema autônomo (8) de modo que tal parâmetro seja tratado na condição inicial de um problema de Cauchy. Assim, se $f(x) = f(x, b)$, consideramos o novo sistema associado

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t), b) \\ \frac{db}{dt} = 0 \\ (x_0, b) = x(0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{10}$$

onde o parâmetro b aparece agora na condição inicial.

3 Resultados obtidos

Como aplicação de sistemas fuzzy escolhemos o modelo geral de crescimento em peso, equação (4). Vamos analisar o desenvolvimento de peixes, especificamente do tambaqui [3]. Uma relação entre as variáveis peso e comprimento desta espécie é dada na Tabela 1.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0054

Comp(cm)	Peso (Kg)	Comp(cm)	Peso (Kg)	Comp(cm)	Peso (Kg)
3,4	0,00118	23,2	0,4404	35	1,5133
4	0,00221	24	0,5402	42,5	2,95
5,4	0,00738	25	0,5775	45,5	3,6
9,4	0,03261	26,9	0,7609	50,2	4,35
9,7	0,03768	27	0,7784	60,1	7,1
10	0,0409	28	0,8672	65	9,3
15	0,1366	29	0,9279	70	13,35
16	0,1372	29	0,8264	75	11,15
17,1	0,2099	30,1	1,072	77,5	14,85
18	0,2290	31,1	1,061	78,2	22,5
19,1	0,1491	32	1,2689	80	18,125
22	0,3795	33,1	1,3387	82,1	22
22,3	0,3859	34,2	1,6181	85	21,5

Tabela 1. - Comprimento e peso do tambaqui.
Fonte: Grupo de pesquisa da UFAM

O Crescimento de uma determinada espécie mantém certas propriedades por exemplo, a alometria entre o comprimento l e o peso p é dada por uma função potência $p = al^{\lambda}$ proveniente da relação alométrica

$$\frac{\frac{dp}{dt}}{p} = \lambda \frac{\frac{dl}{dt}}{l}$$

No caso do tambaqui, um ajuste dos dados da Tabela 1 nos dá $p = 5 \times 10^{-5} l^{2,91}$

O parâmetro de alometria $\lambda = 2,91$, obtido do ajuste dos dados, está sujeito às imprecisões advindas das medidas tomadas. Se considerarmos que tal precisão está "em torno de" 2%, podemos tomar este parâmetro como sendo o número fuzzy triangular $\widehat{\lambda} = [2,85; 2,91; 2,97]$. Se considerarmos a alometria com este parâmetro fuzzy teremos $p = 5 \times 10^{-5} l^{\widehat{\lambda}}$, cujo gráfico é dado pela Figura 3

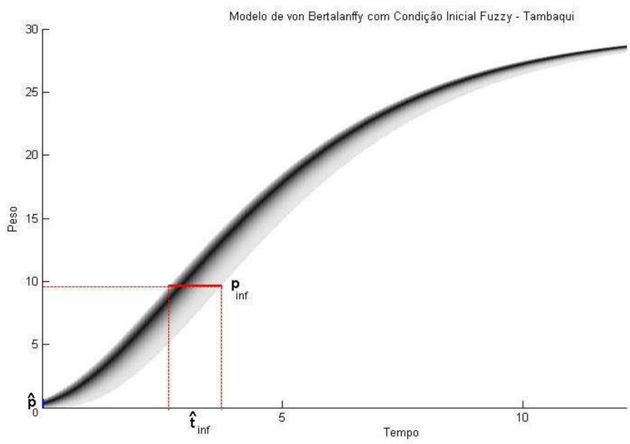

Figura 2: Solução do modelo de crescimento em peso do tambaqui com condição inicial fuzzy

O modelo de von Bertalanffy generalizado (4) pode ser associado a um modelo correspondente fuzzy quando não se tem certeza da condição inicial. - Neste caso, do peso do tambaqui recém nascido:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \alpha p^{\gamma} - \beta p \\ p(0) = \widehat{p}_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \end{cases} \tag{11}$$

cuja solução é dada por

$$\widehat{p}(t) = [\frac{\alpha}{\beta} + \widehat{C} e^{-\beta(1-\gamma)t}]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

onde, $\widehat{C} = \widehat{p}_0^{(1-\gamma)} - p_\infty^{(1-\gamma)}$ e $p_\infty = \left[\frac{\alpha}{\beta}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$.

Observamos que, se apenas a condição inicial for fuzzy e como o peso de estabilidade não depende da condição inicial então, o ponto de estabilidade do sistema fuzzy é dado pelo ponto crisp $\chi_{\{p_\infty\}}$, conforme se pode ver na $Fig.3$. No caso do tambaqui tem-se $p_\infty = 30Kg$.

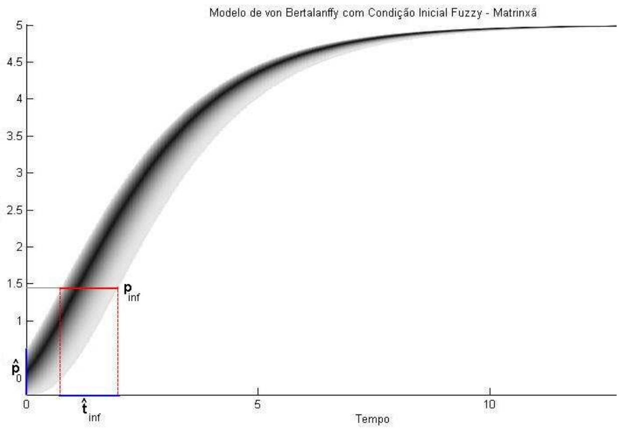

Figura 3: Modelo de Von Bertalanfy com condição inicial Fuzzy

O ponto de inflexão para o modelo fuzzy (11) também independe da condição inicial e é dado pelo ponto crisp

$$\mu_{\widehat{p}_{\text{inf}}} = \chi_{\{p_{\text{inf}}\}} = \chi_{\left\{\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} p_\infty\right\}}$$

Por outro lado, o tempo onde se dá a inflexão da solução do modelo fuzzy depende da condição inicial e, via extensão de Zadeh 4, é dado por

$$\widehat{t_{\text{inf}}} = \frac{\ln\left[\frac{\gamma-1}{\left(\frac{\widehat{p_0}}{p_\infty}\right)^{1-\gamma}-1}\right]}{(1-\gamma)\,\beta} \tag{12}$$

No caso da criação em cativeiro ou mesmo se considerarmos uma política de preservação destes animais, somente podemos abatê-los depois da idade $\widehat{t_{\text{inf}}}$.

Vamos agora considerar um modelo de crescimento em peso do tambaqui com incerteza no parâmetro de alometria. A maneira formal para estabelecer este fato é dada por um sistema fuzzy associado a um sistema determinístico, neste caso, ao modelo generalizado de von Bertalanffy:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \alpha p^\gamma - \beta p \\ p(0) \in \mathbb{R}; \widehat{\gamma} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \end{cases} \tag{13}$$

cuja solução, via extensão de Zadeh, é dada por

$$\widehat{p}(t) = [\frac{\alpha}{\beta} + \widehat{C}e^{-\beta(1-\widehat{\gamma})t}]^{\frac{1}{1-\widehat{\gamma}}}$$

Para adequar aos dados de crescimento do tambaqui tomamos como parâmetro de alometria o número fuzzy $\widehat{\lambda} = [2,85; 2,91; 2,97]$ e, portanto, $\widehat{\gamma} = \frac{2}{\widehat{\lambda}} = [0,673; 0,687; 0,702]$. Assim, quando consideramos o parâmetro $\widehat{\gamma}$ fuzzy, obtemos o ponto de inflexão fuzzy como função de $\widehat{\gamma}$

$$\widehat{p_{\text{inf}}} = \widehat{(\gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}} p_\infty} = \left(\frac{1}{\widehat{\gamma}}\right)^{\frac{1}{\widehat{\gamma}-1}} \widehat{p_\infty}$$

O suporte de $\widehat{p_{\text{inf}}}$ é o intervalo $[7,728; 10,865]$ sendo que seu maior grau de pertinência é para o ponto $p_{\text{inf}} = 9,04Kg$. Observamos que, neste caso temos $\frac{\alpha}{\beta} = 2,9$ e o valor de de estabilidade do peso $\widehat{p_\infty}$ também é fuzzy (veja Figura. 4),

$$\widehat{p_\infty} = \left[\frac{\alpha}{\beta}\right]^{\frac{1}{1-\widehat{\gamma}}}$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0054

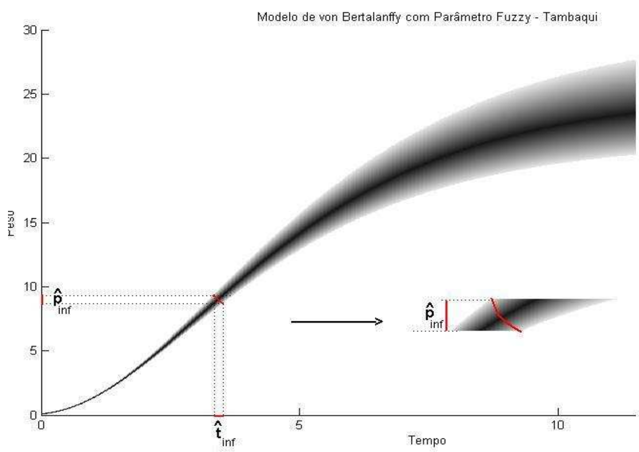

Figura 4: Crescimento do tambaqui com parâmetro de alometria $\widehat{\gamma}$ fuzzy

com suporte $[25,945; 35,618]$ e maior grau de pertinência no valor $p_\infty = 30,01$. Neste caso o tempo de inflexão é dado por:

$$\hat{t}_{inf} = \frac{\ln\left[\dfrac{\hat{\gamma}-1}{\left(\dfrac{p_0}{p_\infty}\right)^{1-\hat{\gamma}} - 1}\right]}{(1-\hat{\gamma})\beta} \tag{14}$$

4 Conclusões

Apresentamos um estudo sobre o crescimento em peso do Tambaquí, baseando-se no modelo de Von Bertalanffy generalizado. Atravês da teoria fuzzy realizamos um estudos deste modelo considerando a existência de incerteza na condição inicial ou no parâmetro de alometria. Vimos que o ponto de inflexão não se altera, e continua sendo determinístico, quando a condiçao inicial é fuzzy enquanto que, ao considerarmos que o parâmetro de alometria é fuzzy, o ponto de inflexão também é fuzzy.

Referências

[1] Barro, L. C. e Bassanezi, R.C - "Tópicos de lógica Fuzzy e Biomatemática"; Unicamp, 2010.

[2] Cecconello, M. S, Brandão, A,J.V, Bassanezi, R,C. - "Sobre o Ponto de In?ex ao em Modelos de Crescimento Inibido com Condiªc ao Inicial Fuzzy"; Revista Biomatemática - UNICAMP, número 19.

[3] Custódio, E. B.- "Crescimento de Matrinxã e Tambaqui: Modelos Fuzzy"; Dissertação de Mestrado, CMCC – UFABC, Abril/2013.

[4] Mizukoshi, M.- "Estabilidade de sistemas dinâmicos fuzzy"; Tese de Doutorado, IMECC-Unicamp, 2004.

[5] Nguyen, H. T., Walker, E. A. -"A first course of fuzzy logic"; CRC Press, Boca Raton, 1997.

