Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Representação Spinorial de subvariedade no espaço de de Sitter

Samuel A Wainer[1]
ITA, São José dos Campos, SP

Resumo. Desde o primeiro trabalho de Thomas Friedrich, mostrando que imersões isométricas de superfícies no espaço euclidiano estão relacionadas com spinores e a equação de Dirac, vários trabalhos surgiram generalizando essa abordagem para variedades *Spin* mais gerais; em particular o caso de imersões em espaços curvatura constante. No presente trabalho investigamos a caracterização spinorial de imersões isométricas de variedades *Spin* e $Spin^{\mathbb{C}}$ no espaço de de Sitter.

Palavras-chave. Imersão, Spinores, Álgebras de Clifford, Espaço de de Sitter

1 Introdução

Um problema clássico da Geometria Diferencial é o estudo de imersões isométricas de variedades riemannianas. Classicamente, esse problema é estudado pelas equações de Gauss-Codazzi-Mainardi. Para o caso especial de superfícies de Riemann o problema é tratado através do mapa de Weierstrass por meio de Análise Complexa. Recentemente, este problema ganhou um novo ímpeto quando Friedrich, [6], descobriu que o mapa de Weierstrass pode ser descrito usando spinores.

Desde então, inúmeros trabalhos surgiram, [1–3, 5, 8–10], mostrando como a Equação de Dirac, Spinores, Equações de Gauss-Codazzi-Mainardi e imersões isométricas estão relacionados. Em particular, Bayard et. al., [2], mostraram como generalizar o conceito do mapa spinorial de Weierstrass para variedades *Spin* com dimensão arbitrária em formas espaciais. Como de costume, para seguir a abordagem de spinores, devemos assumir que as variedades envolvidas carregam uma estrutura *Spin* e, novamente, existem alguns casos, como variedades complexas, em que essa suposição é mais restritiva do que a suposição da existência de uma estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$.

Em [5], mostramos como generalizar o mapa de Weierstrass obtido por Bayard et. al. para o caso de variedades $Spin^{\mathbb{C}}$, em particular todas as variedades quase-complexas. Neste trabalho estamos interessados em apresentar a representação spinorial de imersões isométricas de variedades *Spin* e $Spin^{\mathbb{C}}$ no espaço de de Sitter.

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira: na Seção 2 fixamos as notações necessárias, onde descrevemos o espaço de de Sitter $\boldsymbol{S}$ como uma pseudoesfera mergulhada em $\mathbb{R}^{4,1}$. Na Seção 3 enunciamos os resultados preliminares já existentes na literatura e por fim apresentamos a caracterização spinorial de imersões isométricas de variedades *Spin* e $Spin^{\mathbb{C}}$ no espaço de de Sitter. Finalmente, na Seção 4 apresentamos nossas conclusões..

2 O espaço de de Sitter

Considere $\mathbb{R}^{4,1}$ o par $(\mathbb{R}^5, \mathring{\boldsymbol{g}})$, onde $\mathring{\boldsymbol{g}}$ é a métrica pseudoeuclideana de assinatura $(4, 1)$. No que segue, denotaremos por $SO(4, 1)$ o grupo pseudo-ortogonal em $\mathbb{R}^{4,1}$.

[1]wainer@ita.br

O espaço de de Sitter $\boldsymbol{S} = SO(4,1)/S(4,1)$ é uma subvariedade, na estrutura $\mathbb{R}^{4,1}$. O grupo $SO(4,1)$ age transitivamente em $SO(4,1)/SO(4,1)$, que é, portanto, um espaço homogêneo (para $SO(4,1)$). Definimos o espaço de de Sitter lorentziano como a estrutura $\boldsymbol{S}^{dSL} = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{g}, D, \tau_{\boldsymbol{g}}, \uparrow)$, onde se $i : \boldsymbol{S} \to \mathbb{R}^5$ é a aplicação inclusão, então $\boldsymbol{g} = -i^*\mathring{\boldsymbol{g}}$ é a métrica induzida, D é a conexão de Levi-Civita de $\boldsymbol{S}$, $\tau_{\boldsymbol{g}}$ é uma orientação e $\uparrow$ é uma orientação no tempo em $\boldsymbol{S}$ (para mais detalhes, consulte [13, 14, 17]).

Além disso, $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{g})$ é uma pseudoesfera $S^3 \times \mathbb{R}$ na estrutura $\mathbb{R}^{4,1}$ e é um espaço-tempo com curvatura riemanniana constante.

A partir disso, vamos apresentar a descrição do espaço de de Sitter, $\boldsymbol{S}$, como uma pseudoesfera de raio l dentro da estrutura $\mathbb{R}^{4,1}$.

Sejam $(X^1, X^2, X^3, X^4, X^0)$ coordenadas cartesianas globais de $\mathbb{R}^{4,1}$. A equação representando a pseudoesfera é

$$-\left(X^0\right)^2 + \left(X^1\right)^2 + \left(X^2\right)^2 + \left(X^3\right)^2 + \left(X^4\right)^2 = l^2.$$

Aplicando a projeção estereográfica em $\boldsymbol{S}$, projetando pontos de $S^3 \times \mathbb{R}$ do “polo-norte” ao plano tangente ao “polo-sul”, podemos introduzir coordenadas conformes $\{x^\mu\}$ em $\boldsymbol{S}$. Imediatamente temos que[2]:

$$\boldsymbol{g} = -i^*\mathring{\boldsymbol{g}} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \Omega^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu,$$

onde

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}, \quad \sigma^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu,$$

$$-\sigma^2\Omega^2 + \left(X^4\right)^2 = l^2.$$

$$\Omega = \frac{4l^2}{4l^2 - \sigma^2} = \frac{1}{1 - \frac{\sigma^2}{4l^2}}, \quad \text{e}$$

$$X^\mu = \Omega x^\mu, \quad X^4 = -l\Omega\left[1 + \frac{\sigma^2}{4l^2}\right] = l(1 - 2\Omega).$$

3 Representação spinorial de subvariedades no espaço de de Sitter

Em [2], Bayard, Lawn e Roth estudaram a caracterização spinorial de imersões isométricas de variedades *Spin* de dimensão arbitrária em $\mathbb{H}^n$. Apresentando o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Seja M uma variedade p-dimensional, $E \to M$ um fibrado vetorial de posto q, assuma que TM e E são orientados e Spin. Suponha que $B : TM \times TM \to E$ é uma forma simétrica e bilinear. Aqui $\{e_i\}$ é uma base ortonormal para o espaço tangente TM e ν é o vetor normal de $\mathbb{H}^n$ em $\mathbb{R}^{n,1}$, $(p+q=n)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe um campo de spinores φ em $\mathbb{H}^n$ tal que*

$$\nabla_X \varphi = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} e_i \cdot B(X, e_i) \cdot \varphi - \frac{1}{2} X \cdot \nu \cdot \varphi, \quad \forall X \in TM.$$

2. *Existe uma imersão isométrica $F : M \to \mathbb{H}^n$ com fibrado normal E e segunda forma fundamental B.*

[2] A matriz com entradas $\eta_{\mu\nu}$ é uma matriz diagonal $diag(1, -1, -1, -1)$.

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0091

Além disso, $F = \langle\langle \nu \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle \in \mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n,1}$.

Em [16] enfraquecemos a hipótese de a variedade ser *Spin* e apresentamos a caracterização spinorial de imersões isométricas de variedades $Spin^{\mathbb{C}}$ em $\mathbb{H}^n$:

Teorema 3.2. *Seja* M *uma variedade p-dimensional,* $E \to M$ *um fibrado vetorial de posto q, assuma que* TM *e* E *são orientados e* $Spin^{\mathbb{C}}$*. Suponha que* $B : TM \times TM \to E$ *é uma forma simétrica e bilinear.* A *é a conexão no fibrado* S^1*-principal,* $\{e_i\}$ *é uma base ortonormal para o espaço tangente* TM *e* ν *é o vetor normal de* $\mathbb{H}^n$ *em* $\mathbb{R}^{n,1}$*,* $(p+q=n)$*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe um campo de spinores* φ *em* $\mathbb{H}^n$ *tal que*

$$\nabla_X \varphi = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} e_i \cdot B(X, e_i) \cdot \varphi - \frac{1}{2} X \cdot \nu \cdot \varphi + \frac{1}{2}\mathbf{i}A(X) \cdot \varphi, \quad \forall X \in TM.$$

2. *Existe uma imersão isométrica* $F : M \to \mathbb{H}^n$ *com fibrado normal* E *e segunda forma fundamental* B*.*

Além disso, $F = \langle\langle \nu \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle \in \mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n,1}$.

Sabemos que $\mathbb{H}^n$ é uma pseudoesfera na estrutura $\mathbb{R}^{n,1}$; com a construção do espaço de de Sitter $\boldsymbol{S}$, visto como uma pseudoesfera de raio l em $\mathbb{R}^{4,1}$, apresentada na seção 2, e lembrando que a derivada covariante do vetor unitário normal à $\boldsymbol{S}$ satisfaz

$$\nabla_X \nu = -\frac{1}{l} X,$$

mostramos os seguintes resultados:

Teorema 3.3. *Seja* M *uma variedade p-dimensional,* $E \to M$ *um fibrado vetorial de posto q, assuma que* TM *e* E *são orientados e Spin. Suponha que* $B : TM \times TM \to E$ *é uma forma simétrica e bilinear. Aqui* $\{e_i\}$ *é uma base ortonormal para o espaço tangente* TM *e* ν *é o vetor normal de* $\boldsymbol{S}$ *em* $\mathbb{R}^{4,1}$*,* $(p+q=4)$*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe um campo de spinores* φ *em* $\boldsymbol{S}$*, adaptado à* M*, tal que*

$$\nabla_X \varphi = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} e_i \cdot B(X, e_i) \cdot \varphi - \frac{1}{2}\frac{1}{l} X \cdot \nu \cdot \varphi, \quad \forall X \in TM.$$

2. *Existe uma imersão isométrica* $F : M \to \boldsymbol{S}$ *com fibrado normal* E *e segunda forma fundamental* B*.*

Além disso, $F = \langle\langle \nu \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle \in \boldsymbol{S} \subset \mathbb{R}^{4,1}$.

Demonstração. A demonstração é similar a do Teorema 3.4, com a diferença de não termos aqui, A, a conexão no fibrado S^1-principal. □

Teorema 3.4. *Seja* M *uma variedade p-dimensional,* $E \to M$ *um fibrado vetorial de posto q, assuma que* TM *e* E *são orientados e* $Spin^{\mathbb{C}}$*. Suponha que* $B : TM \times TM \to E$ *é uma forma simétrica e bilinear.* A *é a conexão no fibrado* S^1*-principal,* $\{e_i\}$ *é uma base ortonormal para o espaço tangente* TM *e* ν *é o vetor normal de* $\boldsymbol{S}$ *em* $\mathbb{R}^{4,1}$*,* $(p+q=4)$*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe um campo de spinores φ em $\boldsymbol{S}$, adaptado à M, tal que*

$$\nabla_X \varphi = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} e_i \cdot B(X, e_i) \cdot \varphi - \frac{1}{2}\frac{1}{l} X \cdot \nu \cdot \varphi + \frac{1}{2}\mathbf{i}A(X) \cdot \varphi, \quad \forall X \in TM. \tag{1}$$

2. *Existe uma imersão isométrica $F : M \to \boldsymbol{S}$ com fibrado normal E e segunda forma fundamental B.*

Além disso, $F = \langle\langle \nu \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle \in \boldsymbol{S} \subset \mathbb{R}^{4,1}$.

Demonstração. 2) $\Rightarrow$ 1) Como $\mathbb{R}^{4,1}$ é contrátil existe uma seção global

$$s : \mathbb{R}^{4,1} \to P_{Spin_5^{\mathbb{C}}}\left(\mathbb{R}^{4,1}\right),$$

com base ortonormal paralela correspondente

$$\begin{aligned} & h = (E_1, \cdots, E_5) : \mathbb{R}^{4,1} \to P_{SO(4,1)}\left(\mathbb{R}^{4,1}\right), \\ & k : \mathbb{R}^{4,1} \to P_{S^1}\left(\mathbb{R}^{4,1}\right), \end{aligned}$$

Fixe a constante $1 = [\varphi] \in Spin_5^{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}l_5$ e defina o campo de spinor

$$\varphi = [s, [\varphi]] \in \sum\nolimits^{\mathbb{C}} \mathbb{R}^{4,1} := \left(P_{Spin_5^{\mathbb{C}}}\left(\mathbb{R}^{4,1}\right)\right) \times_k \mathbb{C}l_5.$$

Representando a forma de conexão por

$$w^{\mathbb{R}^{4,1}}(dh(X)) = (w_{ij}^h(X)) \in so(4,1), \ \mathbf{i}A(dk(X)) = \mathbf{i}A(X) \in \mathbf{i}\mathbb{R},$$

temos

$$\begin{aligned} \nabla_X^{\Sigma^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^{4,1}} \varphi &= \left[s, X([\varphi]) + \left\{\frac{1}{2}\sum\nolimits_{i<j} w_{ij}^h(X) E_i E_j + \frac{1}{2}\mathbf{i}A(X)\right\} \cdot [\varphi]\right] \\ &= \left[s, \frac{1}{2}\mathbf{i}A(X) \cdot [\varphi]\right]. \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{i}A(X) \cdot \varphi. \end{aligned}$$

Se ν é o campo vetorial normal da imersão $\boldsymbol{S} \subset \mathbb{R}^{4,1}$, considere um referencial ortonormal local adaptado

$$\{f_1, \cdots, f_4, \nu\} : U \to P_{SO(4,1)}\left(\mathbb{R}^{4,1}\right)\Big|_{\boldsymbol{S}}.$$

Denote por $B^{\boldsymbol{S}} : T\boldsymbol{S} \times T\boldsymbol{S} \to \nu$ a segunda forma fundamental da imersão $\boldsymbol{S} \subset \mathbb{R}^{4,1}$.

Restringindo φ na equação acima ao fibrado spinorial de $\boldsymbol{S}$ e aplicando a fórmula gauss obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_X^{\Sigma^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^{4,1}} \varphi - \nabla_X^{\boldsymbol{S}} \varphi &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot B^{\boldsymbol{S}}(X, f_i) \cdot \varphi \\ \frac{1}{2}\mathbf{i}A(X) \cdot \varphi - \nabla_X^{\boldsymbol{S}} \varphi &= \frac{1}{2}\frac{1}{l} X \cdot \nu \cdot \varphi \\ \nabla_X^{\boldsymbol{S}} \varphi &= -\frac{1}{2}\frac{1}{l} X \cdot \nu \cdot \varphi + \frac{1}{2}\mathbf{i}A(X) \cdot \varphi. \end{aligned}$$

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0091

Além disso, agora podemos restringir φ à M e aplicamos novamente a fórmula de Gauss:

$$\begin{aligned} \nabla^{\boldsymbol{S}}_X\varphi - \nabla_X\varphi &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} e_i \cdot B(X,e_i)\cdot\varphi \\ -\frac{1}{2}\frac{1}{l}X\cdot\nu\cdot\varphi + \frac{1}{2}\mathbf{i}A(X)\cdot\varphi - \nabla_X\varphi &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} e_i \cdot B(X,e_i)\cdot\varphi \end{aligned}$$

Então provamos a primeira parte do teorema

$$\nabla_X\varphi = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} e_i\cdot B(X,e_i)\cdot\varphi - \frac{1}{2}\frac{1}{l}X\cdot\nu\cdot\varphi + \frac{1}{2}\mathbf{i}A(X)\cdot\varphi.$$

1) $\Rightarrow$ 2)A ideia aqui é provar que $F = \langle\langle \nu\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle \in \boldsymbol{S} \subset \mathbb{R}^{4,1}$ nos dá uma imersão preservando a métrica, a segunda forma fundamental e a conexão normal. Isso segue dos seguintes lemas:

Lema 3.1. *Seja $\varphi = [p,[\varphi]]$ um campo spinorial satisfazendo a Eq.(1). Então:*

1. $F : M \to \boldsymbol{S} \subset \mathbb{R}^{4,1}$.
2. $dF(X) = \xi(X) = \langle\langle X\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle\,, \quad \forall X \in TM.$

Lema 3.2. *Com as notações acima, as seguintes afirmações são válidas*

1. *A aplicação $F : M \to \boldsymbol{S} \subset \mathbb{R}^{4,1}$, é uma isometria.*
2. *A aplicação*

$$\begin{aligned} \Phi_E \quad &: \quad E \to F(M)\times\mathbb{R}^{4,1} \\ X \quad &\in \quad E_m \mapsto (F(m),\xi(X)) \end{aligned}$$

é uma isometria entre E e o fibrado normal de $F(M)$ dentro de $\boldsymbol{S}$, preservando conexões e segunda forma fundamental.

□

4 Considerações Finais

O espaço de de Sitter e também o espaço de anti-de Sitter vem sendo estudados como um espaço natural para o movimento de partículas e campos ao invés do espaço-tempo de Minkowski [4, 7, 11–15]. Portanto é natural nos perguntarmos se a formulação apresentada em [1–3, 5, 8–10] pode ser adaptada para o caso de subvariedades *Spin* e $Spin^{\mathbb{C}}$ no espaço de de Sitter. Nessa direção, os teoremas **3.3** e **3.4** apresentam a caracterização spinorial de imersões isométricas de variedades *Spin* e $Spin^{\mathbb{C}}$ no espaço de de Sitter. Uma contribuição original deste trabalho em relação à referência [16] é que, com a construção do espaço de de Sitter apresentada aqui, podemos obter a representação spinorial de subvariedades em $\boldsymbol{S}$ visto como uma pseudo-esfera de raio l, em vez de nos restringirmos apenas à $\mathbb{H}^4 \subset \mathbb{R}^{4,1}$.

Referências

[1] Pierre Bayard. "On the spinorial representation of spacelike surfaces into 4-dimensional Minkowski space". Em: **Journal of Geometry and Physics** 74 (2013), pp. 289–313.

[2] Pierre Bayard, Marie-Amélie Lawn e Julien Roth. "Spinorial representation of submanifolds in Riemannian space forms". Em: **Pacific Journal of Mathematics** 291.1 (2017), pp. 51–80.

[3] Pierre Bayard, Marie-Amélie Lawn e Julien Roth. "Spinorial representation of surfaces into 4-dimensional space forms". Em: **Annals of Global Analysis and Geometry** 44 (2013), pp. 433–453.

[4] Paul Adrian Maurice Dirac. "The electron wave equation in de-Sitter space". Em: **Annals of Mathematics** (1935), pp. 657–669.

[5] Rafael de Freitas Leão e Samuel Augusto Wainer. "Immersion in Rn by Complex Spinors". Em: **Advances in Applied Clifford Algebras** 28.2 (2018), p. 44.

[6] Thomas Friedrich. "On the spinor representation of surfaces in Euclidean 3-space". Em: **Journal of Geometry and Physics** 28.1-2 (1998), pp. 143–157.

[7] Feza Gursey. "Introduction to group theory". Em: **Les Houches Summer Shcool of Theoretical Physics: Relativity, Groups and Topology**. 1964, pp. 91–164.

[8] Marie-Amélie Lawn. "Immersions of Lorentzian surfaces in R2,1". Em: **Journal of Geometry and Physics** 58.6 (2008), pp. 683–700.

[9] Marie-Amélie Lawn e Julien Roth. "Spinorial characterizations of surfaces into 3-dimensional pseudo-Riemannian space forms". Em: **Mathematical Physics, Analysis and Geometry** 14 (2011), pp. 185–195.

[10] Bertrand Morel. "Surfaces in S3 and H3 via spinors". Em: **Séminaire de théorie spectrale et géométrie** 23 (2005), pp. 131–144.

[11] JG Pereira e AC Sampson. "de Sitter geodesics: reappraising the notion of motion". Em: **General Relativity and Gravitation** 44 (2012), pp. 1299–1308.

[12] JG Pereira, AC Sampson e LL Savi. "de Sitter transitivity, conformal transformations and conservation laws". Em: **International Journal of Modern Physics D** 23.04 (2014), p. 1450035.

[13] Waldyr A Rodrigues e Samuel A Wainer. "Notes on conservation laws, equations of motion of matter, and particle fields in Lorentzian and teleparallel de sitter space-time structures". Em: **Advances in Mathematical Physics** 2016 (2016).

[14] Waldyr Alves Rodrigues e Samuel A Wainer. "On the Motion of a Free Particle in the de Sitter Manifold". Em: **Advances in Applied Clifford Algebras** 27 (2017), pp. 1761–1767.

[15] Samuel A Wainer. "Geodésicas e momento angular constante no espaço Anti-de Sitter (2, 3)". Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics** 8.1 (2021).

[16] Samuel Augusto Wainer e Rafael de Freitas Leão. "Representação spinorial de variedades SpinC em formas espaciais". Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics** 7.1 (2020).

[17] A Waldyr Jr e Edmundo C de Oliveira. **The Many Faces of Maxwell, Dirac and Einstein Equations: A Clifford Bundle Approach**. Springer-Verlag GmbH., 2007.

