

Um método do tipo Lagrangiano aumentado para problemas de controle ótimo com restrições mistas e função de custo não suave

Rodrigo B. Moreira,¹ Valeriano A. de Oliveira²

Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Câmpus de São José do Rio Preto, SP

Resumo. Um método do tipo Lagrangiano aumentado que além de resolver problemas de controle ótimo com restrições mistas de controle e de estado na forma de desigualdades e função de custo não suave, produz seqüências que satisfazem as condições do princípio do máximo fraco assintoticamente é investigado. A otimalidade dos pontos de acumulação das seqüências geradas pelo algoritmo proposto foi estudada via versões inexatas das condições do princípio do máximo fraco. Apresentamos também resultados de experimentos numéricos que demonstram a efetividade prática de aplicações da teoria estudada no presente trabalho e projetamos algumas investigações que podem ser desenvolvidas futuramente.

Palavras-chave. Controle Ótimo, Custo Não Suave, Método do Lagrangiano Aumentado, Princípio do Máximo Fraco Assintótico, Restrições Mistas, Soluções Numéricas.

1 Introdução

Dados $[S, T] \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ compacto e convexo, $x_S \in \mathbb{R}^n$, $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m_g}$, o Problema (P) estudado neste trabalho tem a seguinte apresentação:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \ell(x(T)) \\ & \text{sobre } (x, u) \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n) \times L^\infty([S, T]; \mathbb{R}^m) \text{ satisfazendo} \\ & \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \quad (1) \\ & 0 \geq g(t, x(t), u(t)) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \quad (2) \\ & u(t) \in U \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \quad (3) \\ & x(S) = x_S. \quad (4) \end{aligned}$$

Procuramos na literatura métodos que resolvessem (P) e fossem capazes de gerar seqüências do tipo AWMP [6], mas não obtivemos sucesso. Neste cenário, motivados pelos estudos de problemas de programação não linear de dimensão finita por Birgin e Martínez em [2], infinita por Kanzow, Steck e Wachsmuth em [5] e sistemas de equações diferenciais algébricas por Aguiar, Camponogara e Foss em [1], propomos uma nova versão do método do Lagrangiano aumentado.

Métodos do Lagrangiano aumentado para problemas de programação não linear estão entre os mais conhecidos e notáveis, veja [2, 5]. No entanto, muito pouco se discute sobre versões para problemas de controle ótimo. Trabalhos como [1], tratam de problemas diferentes de (P), mais precisamente de sistemas de equações diferenciais algébricas com restrições mistas de estado e de controle na forma de igualdades. Mesmo usando a estratégia de [5], isto é, reescrever problemas de controle ótimo na forma de programação não linear (em dimensão infinita), para então aplicar a versão do método do lagrangiano adequada, é necessária, entre outras hipóteses, a imposição de suavidade na função de custo. Hipótese dispensável em nossa teoria.

¹rodrigo.barbosa@unesp.br

²valeriano.oliveira@unesp.br

Ao longo deste trabalho, L_β^α com $1 \leq \alpha \leq \infty$ e $\beta \in \{1, \dots, n, m, m_g\}$ representa os tradicionais espaços $L^\alpha([S, T]; \mathbb{R}^\beta)$ e $W_n^{1,1}$ o espaço das funções absolutamente contínuas $x : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$. A função Hamiltoniana $\mathcal{H} : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_g} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ associada a (P) é dada por $\mathcal{H}(t, x, p, r, u) := p \cdot f(t, x, u) + r \cdot g(t, x, u)$. Além disso, relembramos que um processo é um par (x, u) formado por um controle $u \in L_m^\infty$ e um arco $x \in W_n^{1,1}$ que é solução de (1) [8, pág. 202]. Um processo admissível (\bar{x}, \bar{u}) (processo que satisfaz (2), (3) e (4)) é dito mínimo local fraco de (P) se existir $\delta > 0$ tal que $\ell(\bar{x}(T)) \leq \ell(x(T))$ para todos os processos admissíveis (x, u) tais que $(x(t), u(t)) \in \Omega_\delta(t) := \{(y, v) \in \mathbb{R}^{n+m} : |(y, v) - (\bar{x}(t), \bar{u}(t))| \leq \delta\}$ q.t.p. em $[S, T]$.

Moreira e de Oliveira apresentam em [6] as definições de seqüências e processos AWMP. Baseados nelas e no contexto do Problema (P), podemos apresentar as seguintes definições.

Definição 1.1 (Seqüências AWMP). *Uma seqüência $\{(x^k, u^k, \xi^k, p^k, r^k, \lambda^k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset W_n^{1,1} \times L_m^\infty \times L_m^1 \times W_n^{1,1} \times L_{m_g}^1 \times [0, +\infty)$ é chamada de **seqüência WMP³ assintótica (seqüência AWMP)** se existirem seqüências $\{\varepsilon^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L_m^1$, $\{\nu_j^k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{\theta_j^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L_1^1$, $j = 1, \dots, m_g$, e $\{\vartheta^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ com $\varepsilon^k \rightarrow 0$ uniformemente, $\nu_j^k(t) \rightarrow 0$ e $\theta_j^k(t) \rightarrow 0$ para todo $j = 1, \dots, m_g$ e quase todo $t \in [S, T]$, $\vartheta^k \rightarrow 0$ tais que, para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo $t \in [S, T]$,*

- (i) $\lambda^k + \|p^k\|_{L^\infty} \neq 0$;
- (ii) $(-\dot{p}^k(t), \xi^k(t)) - (0, \varepsilon^k(t)) \in \text{co } \partial_{x,u} \mathcal{H}(t, x^k(t), p^k(t), r^k(t), u^k(t))$;
- (iii) $\xi^k(t) \in \text{co } \mathcal{N}_U(u^k(t))$;
- (iv) $r_j^k(t)[g_j(t, x^k(t), u^k(t)) - \nu_j^k(t)] = \theta_j^k(t)$ e $r_j^k(t) \leq 0$, $j = 1, \dots, m_g$;
- (v) $-p^k(T) - \vartheta^k \in \lambda^k \partial \ell(x^k(T))$;

em que $\partial \Phi$ e $\mathcal{N}_U(u^k(t))$ são a subdiferencial limite de Φ ($\Phi = \mathcal{H}$ e $\Phi = \ell$) e o cone normal limite a U em $u^k(t)$ [8, Definições 4.3.1 e 4.2.3], respectivamente.

Definição 1.2 (Processos AWMP). *Seja (\bar{x}, \bar{u}) um processo admissível do Problema (P). Chamamos (\bar{x}, \bar{u}) de um processo WMP assintótico (processo AWMP) se existir uma seqüência AWMP $\{(x^k, u^k, \xi^k, p^k, r^k, \lambda^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $x^k \rightarrow \bar{x}$ e $u^k \rightarrow \bar{u}$, ambas uniformemente.*

A Condição (iv) da Definição 1.1 é mais permissiva que a Condição (iii) de [6, Definição 1]. De fato, o primeiro motivo é que consideramos a possibilidade da seqüência $\{\nu_j^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ assumir valores diferentes para $j = 1, \dots, m_g$, e o segundo é devido a adição da seqüência $\{\theta_j^k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $j = 1, \dots, m_g$. Além disso, usando as Hipóteses (H) e (CC) mais as ideias da demonstração do Teorema 1 de [6] podemos concluir que todo mínimo local fraco de (P) é também um processo AWMP, ou seja, as Condições AWMP, dadas por (i)-(v) acima, constituem condições necessárias de otimalidade.

2 O método

Nesta seção apresentamos uma versão do método do Lagrangiano aumentado para problemas de controle ótimo na forma de (P). Mas, antes de apresentá-la, consideramos a hipótese:

- (A) Existe $M \in (0, +\infty)$ tal que, dado $u \in L_m^\infty$, a solução x de (1) e (4) satisfaz $|x(t)| \leq M$ para todo $t \in [S, T]$, com M independente de t e u ; As funções $f(t, \cdot, \cdot)$ e $g(t, \cdot, \cdot)$ são continuamente diferenciáveis em $(\{d \in \mathbb{R}^n : |d| \leq M\} =: X) \times U$ para quase todo $t \in [S, T]$, $g(\cdot, x, u)$ e $\nabla_x g(\cdot, x, u)$ são uniformemente limitadas para todo $(x, u) \in X \times U$ e ℓ é Lipschitz contínua.

Definição 2.1. *Dado $\rho > 0$, definimos a função Lagrangiano aumentado $\mathcal{L}_\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^{m_g} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ por $\mathcal{L}_\rho(x, r, u) := \ell(x(T)) + \int_S^T L_\rho(t, x, r, u) dt$ em que $L_\rho : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^{m_g} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $L_\rho(t, x, r, u) := (\rho/2) \left[\sum_{j=1}^{m_g} (\max \{g_j(t, x, u) + r_j/\rho, 0\})^2 \right]$.*

³WMP é a sigla para *Weak Maximum Principle* e simboliza as condições do princípio do máximo fraco.

Feitas as devidas considerações, podemos apresentar o seguinte algoritmo.

Algoritmo 2.1. *Sejam $r_R \in \mathbb{R}^{m_g}$ tal que $r_R > 0$, $\gamma > 1$, $\rho^0 > 0$ e $\tau \in (0, 1)$. Considere o conjunto $R_B := \{\phi(t) \in \mathbb{R}^{m_g} \mid \phi \in L_{m_g}^1 \text{ e } 0 \leq \phi(t) \leq r_R \text{ para todo } t \in [S, T]\}$. Tome um controle $u^0(t) \in U$, calcule uma trajetória correspondente $x^0(t)$ resolvendo $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u^0(t))$ com $x(S) = x_S$. Defina $V_j^0(t) := \max\{g_j(t, x^0(t), u^0(t)), 0\}$ para todo $t \in [S, T]$ e $j = 1, \dots, m_g$. Tome $\tilde{r}^0(t) \in R_B$, $\lambda^0 \in [0, +\infty)$ e $\varrho \in \partial\ell(x^0(T))$ e resolva $\dot{p}(t) = -\nabla_x f(t, x^0(t), u^0(t))^T p(t) + \sum_{j=1}^{m_b} [-\tilde{r}_j^0(t)] \nabla_x g_j(t, x^0(t), u^0(t))$ com $p(T) = -\lambda^0 \varrho$. Defina $k = 0$ e $\hat{r}^0(t) := \tilde{r}^0(t)$ para todo $t \in [S, T]$.*

Passo 1. *Defina $r^k(t) := -\hat{r}^k(t)$ para todo $t \in [S, T]$. Se $(x^k, u^k, p^k, r^k, \lambda^k)$ satisfaz um critério de parada adequado, PARE.*

Passo 2. *Calcule uma solução aproximada $u^{k+1}(t)$, a trajetória correspondente $x^{k+1}(t)$ e os multiplicadores $p^{k+1}(t)$ e λ^{k+1} do Problema (P^k) : minimizar $\mathcal{L}_{\rho^k}(x, \tilde{r}^k, u)$ sujeito a $(x, u) \in W_n^{1,1} \times L_m^\infty$, (1), (3) e (4).*

Passo 3. *Para todo $t \in [S, T]$ e $j = 1, \dots, m_g$, defina $\hat{r}_j^{k+1}(t) := \max\{\tilde{r}_j^k(t) + \rho^k g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)), 0\}$ e calcule $\tilde{r}^{k+1}(t) := \text{proj}_{R_B}(\hat{r}^{k+1}(t))$.*

Passo 4. *Defina para todo $t \in [S, T]$ e $j = 1, \dots, m_g$, $V_j^{k+1}(t) := \max\{g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)), -\tilde{r}_j^k(t)/\rho^k\}$. Se $\|V^{k+1}\|_{L_{m_g}^\infty} \leq \tau \|V^k\|_{L_{m_g}^\infty}$, então $\rho^{k+1} := \rho^k$; Caso contrário, $\rho^{k+1} := \gamma \rho^k$.*

Passo 5. *Faça $k \leftarrow k + 1$ e vá para o Passo 1.*

Baseados no conceito de **solução sub-ótima** (ou **controle sub-ótimo**) trazido por Hamel em [4], consideramos uma solução aproximada para (P^k) quando a seguinte condição é válida:

- (B) Existe (x^{k+1}, u^{k+1}) viável para o Subproblema (P^k) , $(\lambda^{k+1}, p^{k+1}, \xi^{k+1}) \in (0, +\infty] \times W_n^{1,1} \times L_m^1$ e sequências $\{\varepsilon^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L_m^1$ e $\{\vartheta^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, tais que $\lambda^{k+1} + \|p^{k+1}\|_{L_n^\infty} \neq 0$, $(-p^{k+1}(t), \xi^{k+1}(t)) - (0, \varepsilon^{k+1}(t)) = \nabla_{x,u} \mathcal{H}_{\rho^k}(t, x^{k+1}(t), p^{k+1}(t), \tilde{r}^k(t), u^{k+1}(t))$ para quase todo $t \in [S, T]$, com $\mathcal{H}_\rho(t, x, p, r, u) := p \cdot f(t, x, u) - L_\rho(t, x, r, u)$, $\xi^{k+1}(t) \in \text{co } \mathcal{N}_U(u^{k+1}(t))$ q.t.p. em $[S, T]$, $-p^{k+1}(T) - \vartheta^{k+1} \in \lambda^{k+1} \partial\ell(x^{k+1}(T))$, $\varepsilon^{k+1} \rightarrow 0$ uniformemente e $\vartheta^{k+1} \rightarrow 0$.

A seguir, estudamos a otimalidade das sequências $\{(x^k, u^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ geradas pelo Algoritmo 2.1.

Teorema 2.1. *Suponha que a sequência $\{(x^k, u^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ gerada pelo Algoritmo 2.1 admita um ponto de acumulação (\bar{x}, \bar{u}) , ou seja, sem renomear os subíndices das subsequências, podemos assumir que $x^k \rightarrow \bar{x}$ e $u^k \rightarrow \bar{u}$, ambas uniformemente. Se (\bar{x}, \bar{u}) for um processo admissível para (P) e as Hipóteses (A) e (B) forem satisfeitas, então (\bar{x}, \bar{u}) é um Processo AWMP.*

Demonstração. Pelo Passo 2 do Algoritmo 2.1 e a Hipótese (B), as Condições (i), (iii) e (v) da Definição 2.1 são satisfeitas para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo $t \in [S, T]$, com $\vartheta^{k+1} \rightarrow 0$. A Condição (ii) também é válida, pois se definirmos $r_j^{k+1}(t) := -\hat{r}_j^{k+1}(t) := -\max\{\tilde{r}_j^k(t) + \rho^k g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)), 0\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, m_g$ e quase todo $t \in [S, T]$, então pela Hipótese (B), para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo $t \in [S, T]$, $(-p^{k+1}(t), \xi^{k+1}(t)) - (0, \varepsilon^{k+1}(t)) = \nabla_{x,u} \mathcal{H}(t, x^{k+1}(t), p^{k+1}(t), r^{k+1}(t), u^{k+1}(t))$, com $\varepsilon^{k+1} \rightarrow 0$ uniformemente.

Para verificarmos a Condição (iv), devemos considerar os seguintes casos.

- (a) $\{\rho^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada. Nesta situação é possível concluir que existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ e um $\bar{\rho} > 0$ tal que $\rho^k = \bar{\rho}$ para todo $k \geq k_0$. Isso quer dizer que o Algoritmo 2.1 achou uma sequência cujas iterações, a partir de k_0 , satisfazem $\|V^{k+1}\|_{L_{m_g}^\infty} \leq \tau \|V^k\|_{L_{m_g}^\infty}$. Então, $\|V^{k_0+1}\|_{L_{m_g}^\infty} \leq \tau \|V^{k_0}\|_{L_{m_g}^\infty}$. Assim, $\|V^{k_0+2}\|_{L_{m_g}^\infty} \leq \tau \|V^{k_0+1}\|_{L_{m_g}^\infty} \leq \tau^2 \|V^{k_0}\|_{L_{m_g}^\infty}$. Por um processo de

recorrência, $\|V^k\|_{L_{m_g}^\infty} \leq \tau^k \|V^{k_0}\|_{L_{m_g}^\infty}$ para todo $k \geq k_0$. Como $\tau \in (0, 1)$, tomando limite com $k \rightarrow \infty$, segue que $\|V^k\|_{L_{m_g}^\infty} \rightarrow 0$ e, conseqüentemente, para quase todo $t \in [S, T]$,

$$V_j^{k+1}(t) = \max \{g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)), -\tilde{r}_j^k(t)/\rho^k\} \rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, m_g. \quad (5)$$

Agora, note que como (\bar{x}, \bar{u}) é admissível para (P) , $\bar{g}(t) := g(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \leq 0$ q.t.p. em $[S, T]$. Definindo $I_j^< := \{t \in [S, T] : \bar{g}_j(t) < 0\}$ e $I_j^0 := \{t \in [S, T] : \bar{g}_j(t) = 0\}$, $j = 1, \dots, m_g$, temos $\text{med}(I_j^< \cup I_j^0) = \text{med}(I_j^<) + \text{med}(I_j^0) = \text{med}([S, T]) = 1$, $j = 1, \dots, m_g$. Assim, fixando um $j \in \{1, \dots, m_g\}$ e um $t \in I_j^< \cup I_j^0 \subseteq [S, T]$, ambos arbitrários, devemos analisar:

- (i) $t \in I_j^<$. Retornando à (5), concluímos que $\tilde{r}_j^k(t)/\rho^k \rightarrow 0$. Como $r_j^{k+1}(t) = -\hat{r}_j^{k+1}(t) = -\max\{\tilde{r}_j^k(t) + \rho^k g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)), 0\}$ para todo $k \geq k_0$, segue que $r_j^{k+1}(t) = -\rho^k \max\{\tilde{r}_j^k(t)/\rho^k + g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)), 0\} = 0$ para todo k suficientemente grande. Tomando $\nu_j^{k+1}(t) := 0$ e $\theta_j^{k+1}(t) := r_j^{k+1}(t) [g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) - \nu_j^{k+1}(t)]$ para todo $k \geq k_0$, temos $\theta_j^{k+1}(t) = 0$ para todo k suficientemente grande. Como $t \in I_j^<$ foi fixado arbitrariamente, $\theta_j^{k+1}(t) = \nu_j^{k+1}(t) = 0$ para todo $t \in I_j^<$ e k suficientemente grande.
- (ii) $t \in I_j^0$. Pela continuidade de $g_j(t, \cdot, \cdot)$ em $X \times U$ e das convergências de $\{x^{k+1}(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{u^{k+1}(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$, segue que $g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) \rightarrow 0$. Logo, $\{r_j^{k+1}(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada para todo $k \in \mathbb{N}$. Definindo $\nu_j^{k+1}(t) := 0$ e $\theta_j^{k+1}(t) := r_j^{k+1}(t) [g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) - \nu_j^{k+1}(t)]$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que $\theta_j^{k+1}(t) = 0$ para todo k suficientemente grande. Como $t \in I_j^<$ foi fixado de forma arbitrária, $\theta_j^{k+1}(t) = \nu_j^{k+1}(t) = 0$ para todo $t \in I_j^0$ e k suficientemente grande.

Portanto, como $j \in \{1, \dots, m_g\}$ foi fixado arbitrariamente, $\theta_j^{k+1}(t) = \nu_j^{k+1}(t) = 0$ para todo k suficientemente grande, $j = 1, \dots, m_g$ e quase todo $t \in [S, T]$. Assim, concluímos que $\{\nu_j^{k+1}\}_{k \in \mathbb{N}}, \{\theta_j^{k+1}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L_1^1$ para todo k suficientemente grande e $j = 1, \dots, m_g$.

- (b) $\rho^k \rightarrow +\infty$. Inicialmente, perceba que pelo Algoritmo 2.1, $\{\tilde{r}_j^k(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$, $j = 1, \dots, m_g$, é limitada para todo $t \in [S, T]$ e $r_j^{k+1}(t) = -\hat{r}_j^{k+1}(t) = -\max\{\tilde{r}_j^k(t) + \rho^k g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)), 0\} \leq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $t \in [S, T]$ e $j = 1, \dots, m_g$. Além disso, pela continuidade de $g_j(t, \cdot, \cdot)$ em $X \times U$ e as convergências uniformes de $\{x^{k+1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{u^{k+1}\}_{k \in \mathbb{N}}$, para todo $t \in I_j^0$, obtemos

$$|g(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t))| \rightarrow 0. \quad (6)$$

Como feito no Caso (a), fixando um $j \in \{1, \dots, m_g\}$ e um $t \in I_j^< \cup I_j^0 \subseteq [S, T]$, ambos arbitrários, devemos considerar os seguintes casos:

- (i) $t \in I_j^<$. Nesta situação, pela continuidade de $g_j(t, \cdot, \cdot)$ em $X \times U$, podemos tomar $k_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande e concluir que $r_j^{k+1}(t) = 0$ para todo $k \geq k_0$. Definindo $\tilde{\nu}_j^{k+1}(t) := 0$ e $\tilde{\theta}_j^{k+1}(t) := r_j^{k+1}(t) [g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) - \tilde{\nu}_j^{k+1}(t)]$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que $\tilde{\theta}_j^{k+1}(t) = 0$ para todo $k \geq k_0$. Logo, como $t \in I_j^<$ foi fixado de forma arbitrária, $\tilde{\theta}_j^{k+1}(t) = \tilde{\nu}_j^{k+1}(t) = 0$ para todo $t \in I_j^<$ e $k \geq k_0$.
- (ii) $t \in I_j^0$. Se fixarmos um $k \in \mathbb{N}$ arbitrário, então podemos considerar os casos em que $g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) \geq 0$ e $g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) < 0$. No primeiro caso, definindo $\hat{\nu}_j^{k+1}(t) := |g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t))|$ e $\hat{\theta}_j^{k+1}(t) := r_j^{k+1}(t) [g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) - \hat{\nu}_j^{k+1}(t)]$, segue que $\hat{\theta}_j^{k+1}(t) = 0$. Logo, como $t \in I_j^0$ foi fixado de forma arbitrária, $\hat{\theta}_j^{k+1}(t) = 0$ para todo $t \in I_j^0$. No segundo caso, pelo Algoritmo 2.1, $\rho^k > 0$, $\tilde{r}_j^k(t) \geq 0$ e $r_j^{k+1}(t) \leq 0$. Como $g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) < 0$, segue que $\tilde{r}_j^k(t) + \rho^k g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) < \tilde{r}_j^k(t)$. Assim, $\max\{\tilde{r}_j^k(t) + \rho^k g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)), 0\} \leq$

$\max\{\tilde{r}_j^k(t), 0\}$. Consequentemente, $r_j^{k+1}(t) = -\max\{\tilde{r}_j^k(t) + \rho^k g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)), 0\} \geq -\max\{\tilde{r}_j^k(t), 0\}$. Desta forma,

$$\begin{aligned} 0 &\geq r_j^{k+1}(t) (-g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t))) \\ &\geq -\max\{\tilde{r}_j^k(t), 0\} (-g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t))) \\ &= -\tilde{r}_j^k(t) |g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t))|. \end{aligned} \tag{7}$$

Como $k \in \mathbb{N}$ e $t \in I_j^0$ são arbitrários, se o caso em que $g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) < 0$ ocorrer infinitas vezes, da limitação de $\{\tilde{r}_j^k(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$ para todo $t \in I_j^0$ e $k \in \mathbb{N}$, da convergência em (6) e de (7), $r_j^{k+1}(t) (g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t))) \rightarrow 0$ e $-\tilde{r}_j^k(t) |g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t))| \rightarrow 0$ para todo $t \in I_j^0$. Consequentemente, ao tomarmos $\hat{\nu}_j^{k+1}(t) := |g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t))|$ e $\hat{\theta}_j^{k+1}(t) := r_j^{k+1}(t) [g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) - \hat{\nu}_j^{k+1}(t)]$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $t \in I_j^0$, teremos que $\hat{\nu}_j^{k+1}(t) \rightarrow 0$ e $\hat{\theta}_j^{k+1}(t) \rightarrow 0$, ambas as convergências q.t.p. em I_j^0 .

Pela arbitrariedade de $j \in \{1, \dots, m_g\}$, se para todo k suficientemente grande definirmos $\theta_j^{k+1}(t) := \hat{\theta}_j^{k+1}(t)$, $\nu_j^{k+1}(t) := \hat{\nu}_j^{k+1}(t)$ para $t \in I_j^<$ e $\theta_j^{k+1}(t) := \hat{\theta}_j^{k+1}(t)$, $\nu_j^{k+1}(t) := \hat{\nu}_j^{k+1}(t)$ para $t \in I_j^0$, então podemos concluir que $\nu_j^{k+1}(t) \rightarrow 0$ e $\theta_j^{k+1}(t) \rightarrow 0$, $j = 1, \dots, m_g$, com ambas as convergências q.t.p. em $[S, T]$. Além disso, $\{\nu_j^{k+1}\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{\theta_j^{k+1}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L^1_1$ para todo k suficientemente grande e $j = 1, \dots, m_g$.

Portanto, como por hipótese $x^k \rightarrow \bar{x}$ e $u^k \rightarrow \bar{u}$, ambas uniformemente, e (\bar{x}, \bar{u}) é admissível, segue que (\bar{x}, \bar{u}) é um processo AWMP. \square

3 Algumas Aplicações

Nesta seção fornecemos duas aplicações do método do Lagrangiano aumentado proposto em problemas de controle ótimo. A implementação foi feita em MATLAB. O critério geral de parada para o Algoritmo 2.1 foi as Condições (i)-(v) da Definição 1.1. Utilizamos precisão de 10^{-5} . Adotamos 10^3 como o número máximo de iterações e 50 pontos para discretizar uniformemente $[S, T]$. Tomamos $r_R := 50$, $\tilde{r}^0(t) := 10 \forall t \in [0, 1]$, $\rho^0 := 10^{-2}$, $\gamma := 1,71$ e $\tau := 10^{-3}$. Os Subproblemas (P^k) foram resolvidos usando o método *Sequential Quadratic Hamiltonian* (SQH) [3, Algoritmo 1] com os parâmetros $\epsilon := 1,6$, $\kappa := 10^{-8}$, $\sigma := 5$, $\zeta := 10^{-8}$ e $\eta := 10^6$. O número máximo de iterações adotado para o método SQH foi igual a 200. Escolhemos o método SQH, pois por [3, Teorema 6], ele gera seqüências que satisfazem a Hipótese (B), necessária ao Algoritmo 2.1.

Exemplo 3.1 (Seierstad e Sydsaeter [7, pág. 271]). *O Problema (P1)⁴ consiste em:*

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \int_0^1 -x(t) dt \\ &\text{sobre } (x, u) \in W^{1,1}([0, 1]; \mathbb{R}) \times L^\infty([0, 1]; \mathbb{R}) \text{ satisfazendo} \\ &\quad \dot{x}(t) = x(t) + u(t) \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ &\quad 0 \geq u(t) + x(t) - 2 \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ &\quad u(t) \in [-1, 1] \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ &\quad x(0) = 0. \end{aligned}$$

Uma solução exata para (P1) é dada por $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) = (e^t - 1, 1) \forall t \in [0, \ln(2)]$ e $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) = (2t + 1 - 2 \ln(2), 1 + 2 \ln(2) - 2t) \forall t \in (\ln(2), 1]$, ver [7, pág. 273]. Na Figura 1, além desta solução, exibimos os resultados obtidos pelo método proposto para x, u e os multiplicadores p e r . Os erros absolutos⁵ fornecidos pelo Algoritmo 2.1 para x, p e r foram $e_x \approx 0,0063$, $e_p \approx 0,0299$ e

⁴O Problema (P1) está escrito na forma de Lagrange, enquanto o Problema (P) está escrito na forma de Mayer. Felizmente, isso não é um obstáculo para nossas análises, pois eles são equivalentes.

⁵As soluções exatas para os multiplicadores associados a (\bar{x}, \bar{u}) são dadas por $\bar{p}(t) = (4 - 2 \ln(2))e^{-t} - 1 \forall t \in [0, \ln(2)]$, $\bar{p}(t) = 1 - t \forall t \in (\ln(2), 1]$, $\bar{r}(t) = 0 \forall t \in [0, \ln(2)]$ e $\bar{r}(t) = 1 - t \forall t \in (\ln(2), 1]$, ver [7, pág. 273].

$e_r \approx 0,0003$, respectivamente. Além disso, pelo fato de $\mathcal{H}(t, x, p, r, u) = p(x + u) + x + r(u + x - 2)$, temos $\mathcal{H}(1, \bar{x}(1), \bar{p}(1), \bar{r}(1), \bar{u}(1)) = \bar{x}(1)$, pois $\bar{p}(1) = \bar{r}(1) = 0$. Logo, qualquer $u(1) \in [-1, 1]$ minimiza $\mathcal{H}(1, x, p, r, u)$. Desta forma, o método SQH pode apresentar problemas em $t = 1$, como pode ser visto na Figura 1. No entanto, como buscamos u em $L^\infty([0, 1]; \mathbb{R})$ podemos descartar $u(1)$ das nossas análises de erro, resultando em $e_u \approx 0,0059$.

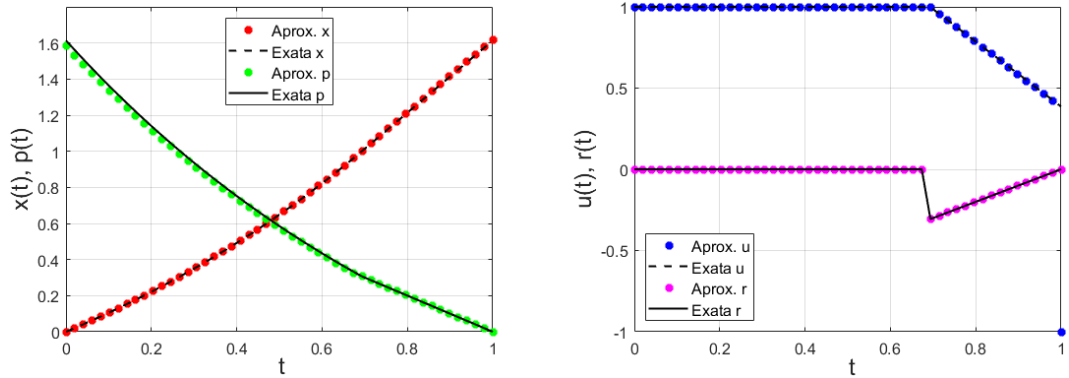


Figura 1: Resultados numéricos para $u^0(t) := 1 \forall t \in [0, 1]$. Foram feitas 22 iterações.

Como na teoria das condições AWMP, no Algoritmo 2.1 não precisamos impor suavidade na função de custo. O segundo exemplo exibido neste trabalho ilustra esta situação.

Exemplo 3.2. O Problema (P2) é dado por:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } |x(1) - 2| \\ & \text{sobre } (x, u) \in W^{1,1}([0, 1]; \mathbb{R}) \times L^\infty([0, 1]; \mathbb{R}) \text{ satisfazendo} \\ & \quad \dot{x}(t) = u(t) \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ & \quad 0 \geq -u(t) + 0,5x(t) \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ & \quad u(t) \in [0, 2] \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ & \quad x(0) = 0. \end{aligned}$$

Como a função de custo é não negativa e o par de funções $x(t) := 2t \forall t \in [0, 1]$ e $u(t) := 2 \forall t \in [0, 1]$ é viável para (P2), segue que ele também é uma solução ótima para (P2). Na Figura 2 exibimos o gráfico desta solução junto com os resultados obtidos pelo método do lagrangiano aumentado proposto e também o erro absoluto.

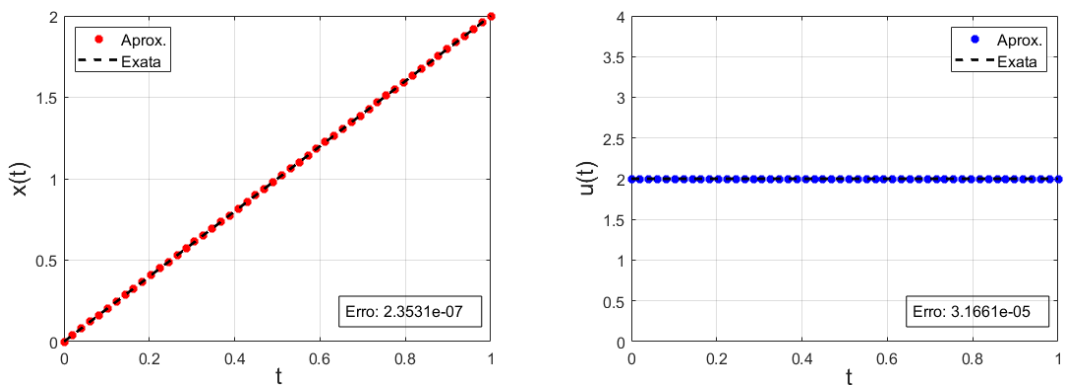


Figura 2: Resultados numéricos para $u^0(t) := 0 \forall t \in [0, 1]$ e $\lambda^0 := 1$. Foram feitas 14 iterações.

Mediante os resultados exibidos nos Exemplos 3.1 e 3.2, concluímos que o método proposto comportou-se bem frente aos desafios de cada problema, atestando assim a sua potencialidade.

4 Considerações Finais

Neste trabalho propomos um método do tipo Lagrangiano aumentado capaz de gerar seqüências cujos limites, quando existem, são processos AWMP e apresentamos alguns exemplos que ilustram a teoria. Além disso, fizemos algumas aplicações do algoritmo proposto para a solução numérica de alguns problemas de controle ótimo que servem para demonstrar a sua viabilidade prática e também evidenciar suas potencialidades. Para trabalhos futuros desejamos implementar o Algoritmo 2.1 à problemas mais complexos (número maior de restrições, restrições não lineares, etc.) e também aplicar nossa teoria a problemas reais, por exemplo, em modelos de espalhamento de doenças como a Covid 19 e a dengue.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processos 2013/07375-0 e 2022/16005-0, e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

- [1] M. A. Aguiar, E. Camponogara e B. Foss. “An augmented Lagrangian method for optimal control of continuous time DAE systems”. Em: **2016 IEEE Conference on Control Applications (CCA)**. 2016, pp. 1185–1190. DOI: 10.1109/CCA.2016.7587967.
- [2] E. G. Birgin e J. M. Martínez. **Practical augmented Lagrangian methods for constrained optimization**. Ed. por Fundam. Algorithms 10. Philadelphia: SIAM, 2014.
- [3] T. Breitenbach e A. Borzi. “On the SQH scheme to solve nonsmooth PDE optimal control problems”. Em: **Numerical Functional Analysis and Optimization** 40.13 (2019), pp. 1489–1531. DOI: 10.1080/01630563.2019.1599911.
- [4] A. Hamel. “Suboptimality theorems in Optimal Control”. Em: **Variational Calculus, Optimal Control and applications**. Ed. por W. H. Schmidt, K. Heier, L. Bittner e R. Bulirsch. Vol. 124. Basel: Springer Basel AG, 1998, pp. 61–68.
- [5] C. Kanzow, D. Steck e D. Wachsmuth. “An augmented Lagrangian method for optimization problems in Banach spaces”. Em: **SIAM Journal on Control and Optimization** 56.1 (2018), pp. 272–291. DOI: 10.1137/16M1107103.
- [6] R. B. Moreira e V. A. de Oliveira. “Princípio do Máximo Fraco Assintótico”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. 2022.
- [7] A. Seierstad e K. Sydsaeter. **Optimal Control Theory with Economic Applications**. USA: Elsevier North-Holland, Inc., 1986.
- [8] R. Vinter. **Optimal Control**. Boston: Birkhäuser, 2000.