Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Advecção Meteorológica e o Cálculo da Frontogêneses: um estudo de interpolação aplicada ao Método do Tubo de Trajetórias

Luciana P. M. Pena[1]
UFF/GMA, Niterói, RJ
Nélio Henderson[2]
UERJ/IPRJ, Nova Friburgo, RJ
Acir M. Soares Jr[3]
UFSJ/DCOMP, São João del Rei, MG

Resumo. Neste artigo, o esquema de interpolação original que compõe o método do Tubo de Trajetória foi comparado com uma versão simplificada de interpolação ponderada pela distância inversa. Este método conservativo é fisicamente intuitivo, se baseia nos fundamentos teóricos da mecânica dos meios contínuos e emprega um esquema semi-Lagrangiano para a equação de advecção. Os esquemas resultantes da aplicação das diferentes técnicas foram avaliadas por meio de um problema teste que corresponde a um protótipo de modelos matemáticos mais sofisticados, comumente empregados na previsão de variações de intensidade de frentes meteorológicas. Neste problema o algoritmo resultante, um esquema semi-Lagrangiano explícito de cinco pontos para escoamento incompressível, mostrou ser capaz de trabalhar com passos de tempo longos e provou ser preciso, não oscilatório e não difusivo.

Palavras-chave. Algoritmo semi-lagrangiano, Equação de advecção, Fórmula de interpolação, Frontogêneses.

1 Introdução

Muitos problemas práticos relacionados com o transporte de uma propriedade física são descritos por uma equação diferencial parcial hiperbólica denominada de equação de convecção ou de advecção. Um exemplo importante é a advecção de frentes meteorológicas. Consequentemente, a modelagem computacional dos fenômenos de convecção é uma área de grande importância, onde a solução dessa equação tem um papel de destaque na predição de diversos problemas de interesse da engenharia e da ciência aplicada.

Dado um campo de velocidade, o modelo para o cálculo da temperatura potencial e sua frontogêneses pode ser estabelecido em termos de um sistema transiente formado por duas equações diferenciais parciais. Nesse sistema, a temperatura potencial satisfaz uma equação de advecção, a equação hiperbólica que expressa a conservação dessa propriedade física. Por outro lado, a função frontogênese é descrita por uma equação proposta por Petterssen [6, 7] . Assim, a resolução numérica deste sistema transiente requer um método apropriado, de forma a lidar com as dificuldades que surgem na resolução da equação hiperbólica, que descreve a conservação da temperatura potencial. Na verdade, tal método deve ser conservativo e não oscilatório, de forma a não produzir

[1]lucianapena@id.uff.br
[2]neliohenderson@iprj.uerj.br
[3]acirsoares@ufsj.edu.br

soluções espúrias. Além disso, devido às exigências normalmente impostas às simulações de modelos atmosféricos, este método deve admitir passos de tempo longos, o que justifica a utilização de um método semi-Lagrangiano.

No presente trabalho, utilizamos o método do Tubo de Trajetórias para equações de advecção, introduzido por Henderson et al. [2], [4], um método conservativo fisicamente intuitivo cuja formulação se baseia nos fundamentos teóricos da mecânica dos meios contínuos e usa o chamado teorema de transporte de Reynolds para estabelecer criteriosamente sua principal propriedade escrita com base em uma equação integral conservativa. O algoritmo resultante é um esquema semi-Lagrangiano explícito de cinco pontos para escoamento incompressível.

2 Modelagem Matemática

A determinação da distribuição de temperatura ao longo de uma massa de ar é um aspecto importante para entender e predizer o nascimento de frentes meteorológicas (frontogêneses). Uma acentuada variação da temperatura pode provocar um grande deslocamento de ar devido a um processo de convecção natural, por exemplo.

Na Termodinâmica, a chamada temperatura potencial de uma partícula material de ar, à pressão P , é definida por: $\Theta = T\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{R}{C_p}}$, onde T é a temperatura absoluta da partícula do material, C_p é o calor específico (a pressão constante) e R é a constante do gás. O parâmetro P_0 é uma pressão de referência padrão (geralmente 1000 mbar). Assim, a variável Θ é interpretada como a temperatura que a partícula material de ar adquiriria se levada adiabaticamente à pressão de referência padrão, [9]. Na análise meteorológica, a temperatura potencial é mais importante do que a temperatura real T , porque ela não muda durante os processos adiabáticos caracterizados pela ausência de aquecimento, resfriamento, evaporação ou condensação.

Suponha que representa o campo de temperatura ao longo de uma massa de ar. A frontogêneses atmosférica, é definida por [6, 7] como sendo:

$$F = \frac{d}{dt}\|\nabla\Theta\| = \frac{\partial}{\partial t}\|\nabla\Theta\| + V\cdot\|\nabla\Theta\| \tag{1}$$

onde o operador $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V\cdot\nabla$ representa a derivada Lagrangiana, V é a velocidade da massa de ar e $\|\nabla\Theta\|$ é a norma Euclidiana do gradiente de temperatura. Assim, a variável F pode ser interpretada como a taxa de variação do potencial de temperatura seguindo as partícula (ou mais precisamente os pacotes) de ar ao longo do escoamento. A variável Θ é considerada uma propriedade conservativa, de forma que permanece constante ao longo das trajetórias das parcelas de ar, ou seja, satisfaz a equação de convecção $\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial\Theta}{\partial t} + V\cdot\nabla\Theta = 0$. Como o fluido é incompressível, podemos escrever a lei de conservação de massa do ar como:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} + \nabla(\Theta V) = 0 \tag{2}$$

.

As expressões em Eq. (1) e (2) podem ser combinadas de modo a reescrever a frontogêneses, livre de derivadas com relação ao tempo, na seguinte forma equivalente:

$$F = -\frac{\nabla\Theta}{\|\nabla\Theta\|}\cdot[(\nabla V)^T\nabla\Theta] \tag{3}$$

Na formulação geral do método do tubo de trajetórias destinado à resolução da equação de convecção Eq. (1), descrita detalhadamente em [5], temos $\Theta^{n+1} = \frac{\int_{D_t}\Theta(X,t)dX}{|\Omega_{t+\Delta t}|}$ onde $|\Omega_{t+\Delta t}| \equiv$

$\int_{\Omega_{t+\Delta t}} dX$ é a medida de uma célula arbitrária $\Omega_{t+\Delta t}$, D_t a sua imagem mapeada para o instante anterior t e Ω^{n+1} é o valor médio da concentração na célula $\Omega_{t+\Delta t}$.

Apesar da possibilidade de empregarmos métodos de integração em duas variáveis, objetivando a eficiência e simplicidade do esquema, a integral dupla é calculada como sendo $\int_{D_t} \Theta(X,t)dX \cong \hat{\Theta}\Lambda$, sendo $\hat{\Theta} = \Theta(\hat{X},t)$, onde $\hat{X}$ é um ponto em D_t obtido por backtracking do centro da célula $\Omega^{(i,j)}_{t+\Delta t}$, e Λ é a medida de uma área apropriadamente escolhida, descrita em [2]. Na etapa de backtracking resolvemos um sistema de equações diferenciais. Nesse trabalho utilizamos o método clássico de Runge Kutta 4, sujeito às condições finais dadas por $x(t+\Delta t) = \hat{x}$ e $y(t+\Delta t) = \hat{y}$. Após a determinação de $\hat{X}$, o cálculo de $\hat{\Theta} = \Theta(\hat{X},t)$ requer uma interpolação bidimensional. Isso é exigido pois esse ponto não recai, necessariamente, no centro de uma célula da grade, referente ao instante t.

Neste trabalho, para fins de comparação, acoplado ao método utilizamos dois tipos de interpolação. Ambos os tipos utilizam o valor da concentração definido no centro da célula que contém o ponto $\hat{X} = (\hat{x},\hat{y})$ e os valores definidos em cada célula vizinha ao bloco que possui o referido ponto.

A primeira interpolação proposta originalmente, descrita de forma detalhada em [4], pode ser escrita da seguinte forma:

$\hat{\Theta} \cong \frac{\sum_i \Theta_i d_i^{-1}}{\sum_i d_i^{-1}}$, onde as distâncias $d_i = \sqrt{(\hat{x}-x_i)^2 + (\hat{y}-y_i)^2}$ são os pesos considerados.

Usada no desenvolvimento de sistemas de informação geográfica, a segunda interpolação, é a ponderada pela distância inversa, sendo esta uma fórmula de interpolação bidimensional bem estabelecida, originalmente desenvolvida por Shepard [10]. Esta interpolação foi analisada e empregada junto ao método em [3] e pode ser escrita na forma:

$\hat{\Theta} \cong \begin{cases} \sum_{l=j-1}^{j+1}\sum_{k=i-1}^{i+1} \Theta(\hat{X}_{k,l})\delta_{kl}, & se\ \hat{X} \neq \hat{X}_{i,j} \\ \hat{\Theta}(X_{i,j}); & se\ \hat{X} = \hat{X}_{i,j} \end{cases},$

onde $\delta_{kl} = \frac{1}{(\sum_{l=j-1}^{j+1}\sum_{k=i-1}^{i+1} d^i_{k,j})d_{k,l}}$ e $\sum_{l=j-1}^{j+1}\sum_{k=i-1}^{i+1}\delta_{kl} = 1$.

A metodologia utilizada neste trabalho para resolver as Eqs. (2) e (3), empregando o método do Tubo de Trajetórias, está resumida abaixo no Algoritmo 1 . Observe que, em cada passo de tempo desse algoritmo semi-Lagrangiano, o método do Tubo de Trajetórias é usado apenas para resolver a equação de advecção que modela a conservação da temperatura potencial horizontal, um esquema de diferenças finitas centradas é empregado para calcular a frontogêneses no final de um determinado intervalo de tempo, resultando em um algoritmo totalmente explícito que funciona sem restrições de passo de tempo.

Algoritmo 1. Cálculo da Frontogêneses:

Dados: t_0, $\Theta^{(0)}_{i,j}$, $\forall i,j$ Δx, Δy, Δt e $t_f > 0$.

Passo 1: Use o método do Tubo de Trajetórias, para calcular $\Theta^{(n+1)}_{i,j}$, $\forall i,j$.

$$\Theta^{(n+1)}_{i,j} = \hat{\Theta}^{(n)} \cdot \Lambda / \left|\Omega^{(i,j)}\right| \quad \forall i,j$$

Passo 2: Calcule $\nabla\Theta^{(n+1)}_{i,j}$,$\left\|\nabla\Theta^{(n+1)}_{i,j}\right\|$ e $\left(\nabla V^{(n+1)}_{i,j}\right)^T$, $\forall i,j$, use:

$$\nabla\Theta^{(n+1)}_{(i,j)} = \left(\frac{\nabla\Theta^{(n+1)}_{i+1,j} - \Theta^{(n+1)}_{i-1,j}}{\Delta x}, \frac{\nabla\Theta^{(n+1)}_{i,j+1} - \Theta^{(n+1)}_{i,j-1}}{\Delta y}\right)$$

$$\left\|\nabla\Theta^{(n+1)}_{i,j}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\nabla\Theta^{(n+1)}_{i+1,j} - \Theta^{(n+1)}_{i-1,j}}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\nabla\Theta^{(n+1)}_{i,j+1} - \Theta^{(n+1)}_{i,j-1}}{\Delta y}\right)^2}$$

$$\nabla V_{i,j}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Passo 3: Calcule a frontogêneses $F_{i,j}^{(n+1)}$, no nível $n+1, \forall i, j$:

$$F = -\frac{\nabla\Theta^{(n+1)}}{\left\|\nabla\Theta^{(n+1)}\right\|} \cdot [(\nabla V^{(n+1)})^T \cdot \nabla\Theta^{(n+1)}]$$

No esquema de discretização mostrado acima, usamos condições de contorno que representam um fluxo de calor nulo na fronteira do domínio considerado. Isto equivale a tomar $\nabla\Theta \cdot \hat{n} = 0$, para todo t , onde $\hat{n}$ é o vetor unitário normal exterior à fronteira. Para maiores detalhes da dedução e implementação da nossa proposta para o cálculo da frontogêneses, veja [3].

3 Problema Teste

O problema teste proposto apresenta desafios numéricos semelhantes aos encontrados em modelos complexos que empregam equações de advecção.

Com o objetivo de estudar propriedades da frontogêneses, incluindo a influência da vorticidade na sua deformação, Doswell em [1] idealizou um padrão de escoamento onde o ar se move em um vórtice circular impulsionado pela velocidade do vento (V_T), a qual é por hipótese (puramente) tangencial a massa de ar e depende apenas do raio (r) medido a partir da origem, sendo essa velocidade tangencial dada por:

$$V_T(r) = sech^2(r)tgh(r). \tag{4}$$

Em vista disso, Doswell propõe um campo de velocidade bidimensional estacionário definido por:

$$u(x,y) = -V_T(r)sen(\alpha) \tag{5}$$

$$v(x,y) = -V_T(r)sen(\alpha), \tag{6}$$

onde $\alpha = arctg(\frac{y}{x})$ e $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Em um instante t_0, considerando um campo inicial de temperatura, sendo:

$$\Theta(x,y,t_0) = -tgh(\frac{y}{\gamma}), \tag{7}$$

a qual se mostra essencialmente distribuído ao longo da direção y, onde γ é a largura característica da frente meteorológica.

Para testar o método do Tubo de Trajetórias com o modelo de Doswell, seguimos os detalhes sugeridos por Rančić, veja [8]. Assim, escolhemos um domínio plano retangular dado por $B = [-4\ km, 4\ km]^2$ e devido as dimensões do domino considerado, tomamos $\gamma = 2$ km.

A próxima modificação consiste em alterar ligeiramente a velocidade tangencial definida em Eq. (4), de modo que o maior valor de $V_T(r)$ seja igual a 1. Como notado por Doswell, em [1], o valor máximo da função é dado por $V_t(r)_{max} = \frac{1}{1,5\times 3^{\frac{1}{2}}} km/h$, o qual é atingido em $r = 0.658479\ km$. Portanto, a modificação adotada nesta seção considera $V_T(r) = (1,5 \times 3^{\frac{1}{2}})sech^2(r)tgh(r)$.

Rančić [8] mostrou que o modelo convectivo de Doswell (Eqs.2, 5 e 6) juntamente com a condição inicial mais geral exibida em Eq.(7) possui uma solução analítica, dada por:

$$\Theta(x,y,t) = -tgh[\frac{y}{\gamma}cos(\varpi t) - \frac{x}{\gamma}sen(\varpi t)] \tag{8}$$

onde $\varpi(r) = V_T(r)/r$ é a velocidade angular, que neste caso não é uma constante. Em vista deste fato, poderemos comparar os resultados numéricos obtidos pela metodologia proposta aqui com a solução analítica do modelo de Doswell indicada em Eq. (8).

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0016

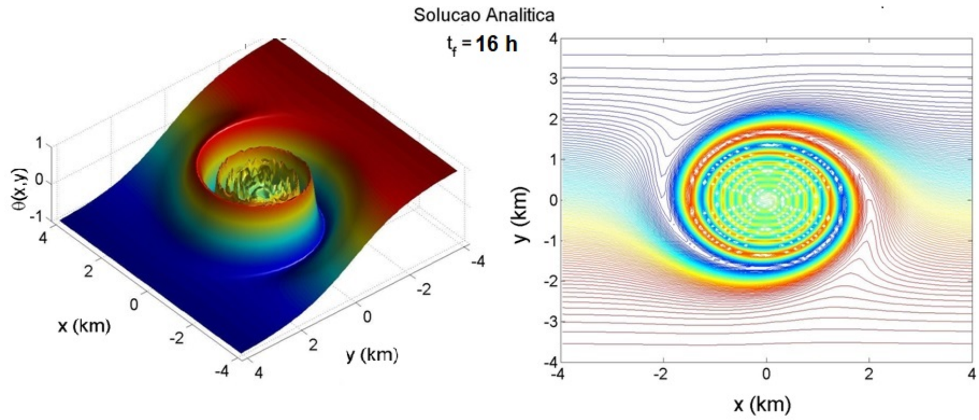

Figura 1: Superfície e curva de nível da solução analítica em $t_f = 16$ h, com $\Delta x = \Delta y = 0,08$ km. Fonte: Elaborada pelos autores.

Neste trabalho, a acurácia dos métodos estudados será medida pelo erro numérico ε_2, definido abaixo, o qual é tomado com a relação a solução exata em todos os pontos da grade de discretização.

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\Delta x \times \Delta y} \sqrt{\frac{\sum_{r,s}(\Theta_{r,s}^{numerica} - \Theta_{r,s}^{analitica})^2}{\sum_{r,s}(\Theta_{r,s}^{analitica})^2}} \tag{9}$$

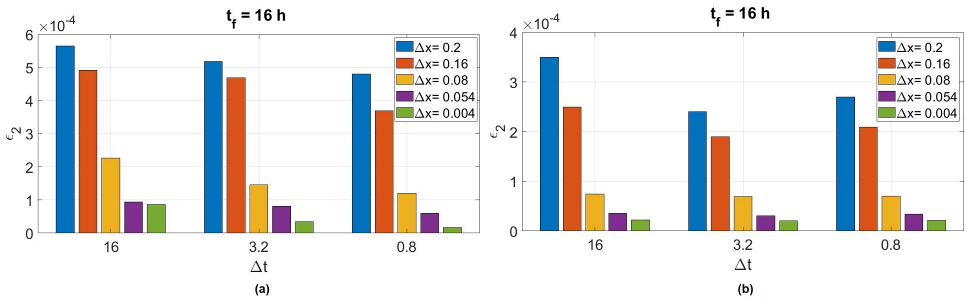

Figura 2: Comparação de erro ε_2 da temperatura potencial em $t_f = 16$ h calculados com o Método do Tubo de Trajetórias para três valores de passos de tempo combinados com cinco valores de $\Delta x = \Delta y$, utilizando em (a) interpolação original e em (b) interpolação ponderada pela distância inversa. Fonte: Elaborada pelos autores.

Comparando o erro, o método de interpolação ponderada pela distância inversa apresenta discreta vantagem com relação ao método de interpolação original, veja Figura (2). Observamos neste estudo numérico a importância de conciliarmos o refinamento da grade com uma escolha apropriada do tamanho do passo de tempo. De fato, como mostrado no gráfico da Figura (2), o erro ε_2 definido na Eq.(9) pode assumir valores relativamente grandes se, em uma grade grossa, Δt não for escolhido suficientemente pequeno. No entanto, notamos que ε_2 tende para zero à medida que refinamos a grade e selecionamos Δt de forma apropriada. É importante destacar que diferentemente do método de interpolação original, para este problema de teste, observamos na interpolação ponderada da distância inversa, que o erro numérico depende de t .

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0016

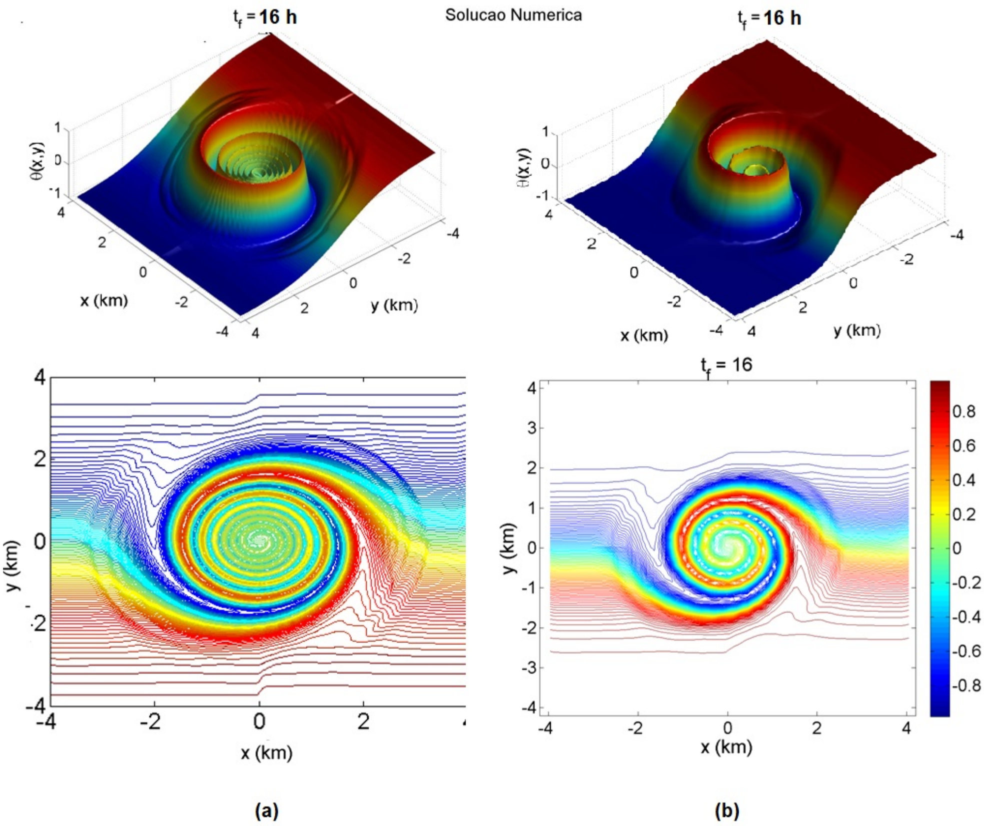

Figura 3: Superfície e curva de nível da solução numérica obtida pelo método do Tubo de Trajetórias, com $t_f = 16$ h e $\Delta x = \Delta y = 0,08$ km, utilizando em (a) interpolação original e em (b) interpolação ponderada pela distância inversa. Fonte: Elaborada pelos autores.

A Figura (3) apresenta boa concordância entre a solução gerada pelo método do Tubo de Trajetória e a solução analítica calculada por Rančić Eq. (8) utilizando ambos os métodos de interpolação.

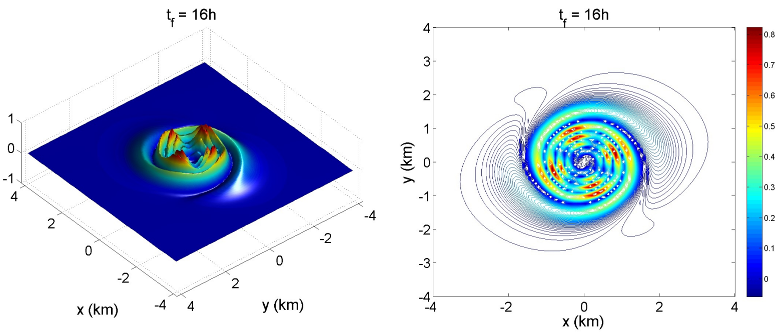

Figura 4: Superfície e curva de nível da solução numérica da frontogêneses do modelo de Doswell obtida pelo método do Tubo de Trajetórias, com $t_f = 16$ h e $\Delta x = \Delta y = 0,08$ km, e $\Delta t = 3,2h$ utilizando em a interpolação ponderada pela distância inversa. Fonte: Elaborada pelos autores.

Na Fig. (4), mostramos as curvas de superfície e contorno da solução numérica para a função de frontogênese usando o modelo de vórtice de Doswell. Esta solução para $F = \frac{d\|\nabla\Theta\|}{dt}$ corresponde ao tempo $t_f = 16h$, que foi calculado após cinco intervalos de tempo do Algoritmo 1 com $\Delta t = 3,2h$ e $\Delta x = \Delta y = 0,08$ km.

Aplicações iniciais relativas ao problema de advecção de frentes meteorológicas e o cálculo da frontogêneses idealizada de Doswell, mostraram que o método do Tubo de Trajetórias pode ser utilizado na computação cientifica destinada à predição do tempo.

4 Considerações Finais

Os resultados computacionais confirmaram que ambos os esquemas analisados apresentam na prática uma boa propriedade conservativa, estabilidade, precisão numérica e eficiência suficiente para ser empregado em problemas práticos, modelados pela equação de convecção. Comparações numéricas com duas interpolações diferentes, demonstram a discreta superioridade da interpolação ponderada pela distância inversa acoplada ao Método do Tubo de Trajetórias, para o problema teste proposto.

Referências

[1] Charles A. Doswell. "A Kinematic Analysis of Frontogenesis Associated with a Nondivergent Vortex". Em: **Journal of Atmospheric Sciences** 41.7 (1984), pp. 1242–1248. DOI: doi.org/10.1175/1520-0469(1984)041<1242:AKAOFA>2.0.CO;2.

[2] L. G. Henderson e L. P. M. Pena. "Developing new approaches for the path tubes method". Em: **Applied Mathematical Modelling** 35 (2011), pp. 285–302. DOI: 10.1016/j.amc.2017.01.053.

[3] L. G. Henderson e L. P. M. Pena. "The inverse distance weighted interpolation applied to a particular form of the path tubes Method: Theory and computation for advection in incompressible flow". Em: **Applied Mathematics and Computation** 304 (2017), pp. 114–135. DOI: 10.1016/j.amc.2017.01.053.

[4] L. G. Henderson, L. P. M. Pena e M. Sampaio. "Path tubes method: A semi-Lagrangian approach for linear advection equations". Em: **Chemical Engineering Science** 64.13 (2009), pp. 3138–3146. ISSN: 0009-2509. DOI: 10.1016/j.ces.2009.03.048.

[5] L. P. M. Pena. "Análise de um método para equação de convecção formulado à luz da mecânica dos meios contínuos a advecção de anomalias oceânicas e meteorológicas". Centro de Tecnologia e Ciências::Instituto Politécnico. Tese de doutorado. 2006.

[6] S. Petterssen. **Contribution to the Theory of Frontogenesis**. 11. 1936, pp. 1–27.

[7] S. Petterssen. **Weather Analysis and Forecasting**. Vol. 1. McGraw-Hill, New York, 1956.

[8] Miodrag Rancić. "Semi-Lagrangian Piecewise Biparabolic Scheme for Two-Dimensional Horizontal Advection of a Passive Scalar". Em: **Monthly Weather Review** 120.7 (1992), pp. 1394–1406. DOI: /10.1175/1520-0493(1992)120<1394:SLPBSF>2.0.CO;2.

[9] Walter J Saucier. **Principles of meteorological analysis**. Vol. 438. University of Chicago Press Chicago, Ill., 1955.

[10] Donald S. Shepard. "A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data". Em: **Proceedings of the 1968 23rd ACM national conference** (1968).

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0016