

Comportamento assintótico de um problema hiperbólico

Ricardo de Sá Teles

Depto de Físico-Química, IQ, UNESP,
14800-060, Araraquara, SP
E-mail: ricardo.sa.teles@gmail.com

Resumo: Neste trabalho apresentamos uma equação hiperbólica com condição de Neumann na fronteira e sem a hipótese de unicidade para o problema de Cauchy associado. Enunciamos o teorema de existência de soluções fracas globais e construímos o atrator de trajetórias para o problema considerado. O nosso resultado principal refere-se à semicontinuidade superior dos atratores quando o parâmetro de difusão é grande.

Palavras-chave: Solução fraca global, atrator de trajetórias, semicontinuidade superior

Seja Ω um subconjunto aberto, limitado, conexo do \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) e com fronteira suave Γ . Para cada ponto $x \in \Gamma$, indicaremos por $\nu = \nu(x)$ o vetor normal exterior unitário a Γ no ponto x . Consideremos o seguinte problema hiperbólico com condição de Neumann

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u - f(u) + |u|^{\alpha-1}u & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & (t, x) \in (0, \infty) \times \Gamma, \end{cases} \quad (1)$$

onde $\gamma > 0$, $d > 0$ está fixado, $\alpha \in (0, 1)$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 satisfazendo as seguintes hipóteses: existem constantes positivas $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, c_1, c_2$ e $2 < p < \frac{2n}{n-2}$ tais que

$$|f(u)| \leq \gamma_0(|u|^{p-1} + 1), \quad (2)$$

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leq C|u_1 - u_2|(1 + |u_1|^{p-2} + |u_2|^{p-2}), \quad (3)$$

$$F(u) = \int_0^u f(w)dw, \quad F(u) \geq \gamma_1|u|^p - c_1, \quad (4)$$

$$f(u) \cdot u \geq \gamma_2 F(u) - c_2, \quad (5)$$

para quaisquer $u \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}$ e $u_2 \in \mathbb{R}$.

Vamos especificar os espaços em que trabalharemos e definiremos quando uma função $u = u(t, x)$ será solução de (1). Como não há um resultado de unicidade de solução para o problema (1) empregaremos a teoria do atrator de trajetórias em nosso estudo, adaptando resultados obtidos nas referências Chepyzhov, V. V. and Vishik, M. I. [5], [6], onde problemas similares a (1) foram considerados para a condição de Dirichlet. Os detalhes podem ser encontrados em R. S. Teles [4].

Consideremos $\tilde{f}(u) = f(u) - |u|^{\alpha-1}u$. Das hipóteses (2)-(5) podemos afirmar que existem constantes positivas $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ tais que

$$|\tilde{f}(u)| \leq (\gamma_0 + 1)(|u|^{p-1} + 1) \doteq \tilde{\gamma}_0(|u|^{p-1} + 1); \quad (6)$$

$$\tilde{F}(u) = \int_0^u \tilde{f}(w)dw, \quad \tilde{F}(u) \geq \tilde{\gamma}_1|u|^p - \tilde{c}_1, \quad (7)$$

onde

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{\gamma_1}{2} \quad \text{e} \quad \tilde{c}_1 = c_1 + \frac{1}{\alpha + 1} \left(\frac{2}{\gamma_1 p} \right)^{\frac{\alpha+1}{p-(\alpha+1)}} \left(\frac{p - (\alpha + 1)}{p} \right);$$

$$\tilde{f}(u) \cdot u \geq \tilde{\gamma}_2 |u|^p - \tilde{c}_2, \tag{8}$$

em que

$$\tilde{\gamma}_2 = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{2} \quad \text{e} \quad \tilde{c}_2 = \left[\gamma_2 c_1 + c_2 + \left(\frac{2(\alpha + 1)}{\gamma_1 \gamma_2 p} \right)^{\frac{\alpha+1}{p-(\alpha+1)}} \left(\frac{p - (\alpha + 1)}{p} \right) \right]$$

Faremos algumas observações antes de introduzir a definição de solução para o nosso problema.

Vamos considerar em $H^1(\Omega)$ a norma

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} (|u|^2 + d|\nabla u|^2) dx \tag{9}$$

para $u \in H^1(\Omega)$, que é equivalente a norma usual

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

O $H^1(\Omega)$ munido da norma (9) será denotado por $H_d^1(\Omega)$.

O espaço dual de $H_d^1(\Omega)$ será denotado por $H_d^{-1}(\Omega)$ e consideraremos o operador contínuo

$$\begin{aligned} \Delta : H_d^1(\Omega) &\longrightarrow H_d^{-1}(\Omega) \\ u &\longmapsto \langle \varphi, \Delta u \rangle = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx \end{aligned}$$

Observemos que para $c_3 = \tilde{c}_1 + 1$ existe uma constante positiva K tal que a função $\Phi(u) = (\tilde{F}(u) + c_3)^{\frac{1}{p}}$ é Lipschitz.

Seja q o expoente conjugado de p , isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Observemos que se $u \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$, então $|u|^{\alpha-1}u \in L^\infty(0, T; L^q(\Omega))$ e de (6) decorre que $\tilde{f}(u) \in L^\infty(0, T; L^q(\Omega))$. Além disso, existe uma constante $\tilde{\gamma}_0$ tal que

$$\|\tilde{f}(u)\|_{L^\infty(0, T; L^q(\Omega))}^q \leq \tilde{\gamma}_0 (\|u\|_{L^\infty(0, T; L^p(\Omega))}^p + 1) \tag{10}$$

para todo $T > 0$, onde $\tilde{\gamma}_0 = 2^q \tilde{\gamma}_0^q (|\Omega| + 1)$.

Por outro lado, se $u \in L^\infty(0, T; H_d^1(\Omega))$, então $\Delta u \in L^\infty(0, T; H_d^{-1}(\Omega))$. Como $p > 2$, do Teorema de imersão de Sobolev e por dualidade temos $L^q(\Omega) \subset H^{-r}(\Omega)$, onde $r = \max\{1, n(\frac{1}{q} - \frac{1}{2})\}$. Logo, se $u \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_d^1(\Omega))$, temos que a equação (1) pode ser considerada no sentido de distribuição do espaço $D'(\mathbb{R}_+; H^{-r}(\Omega))$.

Definição 1. Uma função $u = u(t, x)$, $t \in [0, T]$, $x \in \Omega$, é uma solução fraca global de (1) se $u \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_d^1(\Omega))$, $u_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ e u satisfaz a equação (1) no sentido de distribuição do espaço $D'(0, T; H^{-r}(\Omega))$, para todo $T > 0$, onde $r = \max\{1, n(\frac{1}{q} - \frac{1}{2})\}$, isto é, para toda $\varphi \in H_d^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ vale a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u(t, x) \cdot \varphi(x) dx + 2\gamma \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x) \cdot \varphi dx + \int_{\Omega} [d\nabla u(t, x) \cdot \nabla \varphi(x) + f(u(t, x)) \cdot \varphi(x) - \\ - |u(t, x)|^{\alpha-1} u(t, x) \cdot \varphi(x)] dx = 0. \end{aligned}$$

Observação 1. Sabemos que se u é uma solução fraca global da equação (1), então $u \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_d^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ e $u_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ para todo $T > 0$, portanto $u \in C(0, T; L^2(\Omega))$. Temos também que $u_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0, T; H^{-r}(\Omega))$ e $u_{tt} \in L^\infty(0, T; H^{-r}(\Omega))$ para todo $T > 0$, donde concluímos que $u_t \in C(0, T; H^{-r}(\Omega))$.

Proposição 1. *Se u é uma solução fraca global de (1), então*

$$u \in C_w(0, T; H_d^1(\Omega)), \quad u \in C_w(0, T; L^p(\Omega)), \quad u_t \in C_w(0, T; L^2(\Omega)), \quad (11)$$

para todo $T > 0$. Além disso, para todo $\delta \in \mathbb{R}$ a função

$$t \mapsto \|u(t)\|_{H_d^1(\Omega)} + \|u_t(t) + \delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u(t)\|_{L^p(\Omega)} \quad (12)$$

é semicontínua inferiormente para $t \in [0, T]$, para todo $T > 0$.

Sejam $u \in H_d^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ e $v \in L^2(\Omega)$. Definamos $I : (H_d^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$I(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|v|^2 + d|\nabla u|^2 + 2\tilde{F}(u)] dx.$$

Proposição 2. *Existem constantes positivas k_1, k_2, k_3, k_4 tais que*

$$k_1 [\|u\|_{H_d^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^p(\Omega)}^p] - k_2 \leq I(u, v) \quad (13)$$

e

$$I(u, v) \leq k_3 [\|u\|_{H_d^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^p(\Omega)}^p] + k_4. \quad (14)$$

Seja

$$0 < \delta < \min\{2\gamma, 2k_1\}, \quad (15)$$

onde $k_1 = \frac{1}{2} \min\{1, \tilde{\gamma}_1\}$. Consideremos o seguinte funcional

$$J_{\delta}(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|v|^2 + d|\nabla u|^2 + 2\tilde{F}(u) + 2\delta u \cdot v + 2\delta\gamma|u|^2] dx. \quad (16)$$

Proposição 3. *O funcional J_{δ} satisfaz*

$$\left(k_1 - \frac{\delta}{2}\right) [\|u\|_{H_d^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^p(\Omega)}^p] - k_2 \leq J_{\delta}(u, v) \quad (17)$$

e

$$J_{\delta}(u, v) \leq \left(k_3 + \frac{\delta}{2} + \delta\gamma\right) [\|u\|_{H_d^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^p(\Omega)}^p] + k_4, \quad (18)$$

onde as constantes k_1, k_2, k_3, k_4 foram definidas na Proposição 2.

Corolário 1. *Se u é uma solução fraca global de (1), então a função real $z(t) \doteq J_{\delta}(u(t), u_t(t))$ é semicontínua inferiormente no intervalo $[0, T]$, para todo $T > 0$.*

Teorema 1. *Se $u : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução suficientemente regular de (1) e $z(t) = J_{\delta}(u(t), \partial_t u(t))$, então existem constantes $\mu_{\delta} > 0$ e $\rho_{\delta} > 0$ tais que*

$$\frac{d}{dt} z(t) + \mu_{\delta} z(t) \leq \rho_{\delta}. \quad (19)$$

e portanto,

$$z(t) \leq z(0)e^{-\mu_{\delta}t} + \frac{\rho_{\delta}}{\mu_{\delta}}. \quad (20)$$

Fixemos $N > 0$ e vamos definir o espaço de trajetórias $\mathcal{K}_d^+(N)$ da equação (1).

Definição 2. O espaço $\mathcal{K}_d^+(N)$ é o conjunto das soluções fracas globais u da equação (1) que verificam a desigualdade

$$z(t) \leq N e^{-\mu \delta t} + \frac{\rho \delta}{\mu \delta},$$

para todo $t \geq 0$, onde $z(t) = J_\delta(u(t), \partial_t u(t))$ e δ foi dado em (15).

Proposição 4. Se $u_0 \in H_d^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ e $z_0 = J_\delta(u_0, u_1) \leq N$, então existe pelo menos uma solução fraca global $u \in \mathcal{K}_d^+(N)$ tal que

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = u_1.$$

Vamos definir os conjuntos $\mathcal{F}_{loc,d}^+$, $\mathcal{F}_{b,d}^+$ e a topologia $\Theta_{loc,d}^+$ associados à equação (1). Começamos definindo o conjunto $\mathcal{F}_{T,d}$ da seguinte forma

$$\mathcal{F}_{T,d} = \{v : v \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_d^1(\Omega)), \partial_t v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \partial_t^2 v \in L^\infty(0, T; H^{-r}(\Omega))\}$$

e o munimos da topologia $\Theta_{T,d}$ que, em termos de seqüências, é descrita da seguinte maneira: uma seqüência $\{v_m\} \subset \mathcal{F}_{T,d}$ converge para uma função $v \in \mathcal{F}_{T,d}$ em $\Theta_{T,d}$ se $v_m \xrightarrow{*} v$ em $L^\infty(0, T; H_d^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$, $\partial_t v_m \xrightarrow{*} \partial_t v$ em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ e $\partial_t^2 v_m \xrightarrow{*} \partial_t^2 v$ em $L^\infty(0, T; H^{-r}(\Omega))$.

A topologia definida acima torna $\mathcal{F}_{T,d}$ um espaço topológico de Hausdorff e Frechet-Uryshon com base topológica enumerável.

O conjunto $\mathcal{F}_{T,d}$ e a topologia $\Theta_{T,d}$ dão origem aos conjuntos $\mathcal{F}_{loc,d}^+$, $\mathcal{F}_{b,d}^+$ e a topologia $\Theta_{loc,d}^+$. Temos que

$$\mathcal{F}_{loc,d}^+ = \{v : v \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; L^p(\Omega)) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; H_d^1(\Omega)), \partial_t v \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \text{ e } \partial_t^2 v \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; H^{-r}(\Omega))\};$$

$$\mathcal{F}_{b,d}^+ = \{v \in \mathcal{F}_{loc,d}^+ : v \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^p(\Omega)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+; H_d^1(\Omega)) \cap \partial_t v \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \text{ e } \partial_t^2 v \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^{-r}(\Omega)) \text{ com } \|v\|_{\mathcal{F}_{b,d}^+} < +\infty\},$$

onde

$$\|v\|_{\mathcal{F}_{b,d}^+} = \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^p(\Omega))} + \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; H_d^1(\Omega))} + \|\partial_t v\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))} + \|\partial_t^2 v\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; H^{-r}(\Omega))};$$

E a topologia $\Theta_{loc,d}^+$ em $\mathcal{F}_{loc,d}^+$ é definida da seguinte forma: $v_m \rightarrow v$ em $\Theta_{loc,d}^+$ quando $\Pi_{[0,T]} v_m \rightarrow \Pi_{[0,T]} v$ em $\Theta_{T,d}$ para todo $T > 0$.

O espaço $\mathcal{F}_{loc,d}^+$ munido da topologia $\Theta_{loc,d}^+$ é um espaço topológico Hausdorff, Frechet-Uryshon e possui uma base enumerável.

O espaço $\mathcal{K}_d^+(N)$ munido da topologia $\Theta_{loc,d}^+$ é o espaço de trajetórias da equação (1).

Definamos a aplicação $T(t) : \mathcal{F}_{loc,d}^+ \rightarrow \mathcal{F}_{loc,d}^+$ por $T(t)u(s) = u(t+s)$ e consideremos a família $\{T(t) : t \geq 0\}$ que constitui um semigrupo. Como a equação (1) é autônoma temos que $\mathcal{K}_d^+(N)$ é invariante pelo semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, logo podemos considerar $T(t) : \mathcal{K}_d^+(N) \rightarrow \mathcal{K}_d^+(N)$.

Proposição 5. Se $\mathcal{K}_d^+(N)$ é o espaço de trajetórias da equação (1), então para toda função $u \in \mathcal{K}_d^+(N)$ temos que $T(t)u \in \mathcal{K}_d^+(N)$ para $t \geq 0$.

Proposição 6. Se $\mathcal{K}_d^+(N)$ é o espaço de trajetórias da equação (1), então $\mathcal{K}_d^+(N) \subset \mathcal{F}_{b,d}^+$.

Proposição 7. O espaço de trajetórias $\mathcal{K}_d^+(N)$ é fechado na topologia $\Theta_{loc,d}^+$.

Agora, fixemos um valor $\delta = \delta_0$ verificando (15). Vamos definir o conjunto

$$P = \left\{ u \in \mathcal{F}_{b,d}^+ : z(t) = J_{\delta_0}(u, \partial_t u) \leq 2 \frac{\rho_{\delta_0}}{\mu_{\delta_0}} \right\}.$$

Observemos que o conjunto P é tal que $\|u\|_{\mathcal{F}_{b,d}^+} < +\infty$ para toda função $u \in \mathcal{F}_{b,d}^+$ e é compacto em $\Theta_{loc,d}^+$. Além disso, a desigualdade (20) implica que o conjunto P é um conjunto absorvente do espaço $\mathcal{K}_d^+(N)$.

Proposição 8. *Se \tilde{f} satisfaz (6)-(8), então para cada $d > 0$ a equação (1) possui um atrator de trajetórias $\mathfrak{A}_d(N)$.*

Proposição 9. *o atrator de trajetórias $\mathfrak{A}_d(N)$ não depende de $N > 0$, isto é, $\mathfrak{A}_d(N) \equiv \mathfrak{A}_d$.*

Vamos agora examinar a questão da continuidade do atrator de trajetórias do problema (1)-(5) com relação ao coeficiente de difusão $d > 0$. Há trabalhos que tratam desse assunto para equações cujo problema de Cauchy correspondente goza da propriedade de unicidade de solução, dentre eles citamos os artigos J. Sola-Morales & M. Valencia[3], A. L. Pereira & L. A. F. de Oliveira[1] e A. N. Carvalho [2].

Pelo Teorema 4 e pela Proposição 8, para cada $d > 0$, a equação (1) admite pelo menos uma solução fraca global e possui um atrator de trajetórias \mathfrak{A}_d .

Sejam $\{\lambda_j\}_{j=0}^\infty$ e $\{w_j\}_{j=0}^\infty$ os autovalores e as autofunções normalizadas, respectivamente, do problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta w + \lambda w = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} |_{\Gamma} = 0. \end{cases}$$

Sabemos que $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_j \rightarrow \infty$, $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal completo para $L^2(\Omega)$ e $w_0(x) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}$.

Consideremos a decomposição ortogonal de $L^2(\Omega) = [w_0] \oplus Y$, onde

$$Y = [w_2, w_3, \dots] = \left\{ v : \int_{\Omega} v(x) dx = 0 \right\}$$

é o espaço das funções de $L^2(\Omega)$ com média nula.

Se $u = u(t, x)$ é uma solução de (1), então podemos escrever

$$u(t, x) = \beta(t)w_0(x) + v(t, x) \tag{21}$$

de modo único, onde

$$\beta(t) = \int_{\Omega} u(t, x)w_0(x)dx = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \int_{\Omega} u(t, x)dx$$

e

$$v(t, x) = u(t, x) - \beta(t)w_0(x).$$

A decomposição (21) nos permite reescrever a equação (1) como um sistema de equações da seguinte forma

$$\begin{cases} v_{tt} = -2\gamma v_t + d\Delta v - \tilde{f}(\beta w_0 + v) + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \tilde{f}(\beta w_0 + v) dx \\ \beta_{tt} = -2\gamma \beta_t - \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \int_{\Omega} \tilde{f}(\beta w_0 + v) dx. \end{cases} \tag{22}$$

Queremos demonstrar que se $u(t, x) = \beta(t)w_0(x) + v(t, x)$ é uma solução da equação (1), $d \rightarrow +\infty$ e \mathfrak{A}_∞ é o atrator de trajetórias da equação diferencial ordinária

$$\begin{cases} \xi''(t) + 2\gamma \xi'(t) = -f(\xi(t)) + |\xi(t)|^{\alpha-1} \xi(t) \\ \xi(0) = \xi_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{23}$$

então

- na decomposição (21), a função componente v satisfaz $v \rightarrow 0$ na topologia Θ_{loc}^+ ; e
- a família $\{\mathfrak{A}_d : d > 0\} \cup \{\widetilde{\mathfrak{A}}_\infty\}$ é semicontínua superiormente em $d = \infty$, onde $\widetilde{\mathfrak{A}}_\infty$ é a imersão de \mathfrak{A}_∞ em $[w_0] \oplus Y$ através da aplicação $\xi \in \mathbb{R} \mapsto \xi w_0$.

Vamos enunciar o nosso resultado principal.

Teorema 2. *Se $\widetilde{\mathfrak{A}}_\infty$ é a imersão de \mathfrak{A}_∞ em $L^2(\Omega) = [w_0] \oplus Y$, então a família $\{\mathfrak{A}_d\}_d \cup \{\widetilde{\mathfrak{A}}_\infty\}$ é semicontínua superiormente em $d = \infty$, isto é, para toda vizinhança \mathcal{O} de $\widetilde{\mathfrak{A}}_\infty$ na topologia Θ_{loc}^+ existe $d_0 > 0$ tal que se $d \geq d_0$, então $\mathfrak{A}_d \subset \mathcal{O}(\widetilde{\mathfrak{A}}_\infty)$.*

Referências

- [1] A. L. Pereira & L. A. F. de Oliveira, “Invariant manifolds and limiting equations for a hyperbolic problem”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 7, 503-524, 2000.
- [2] A. N. Carvalho, “Spatial homogeneity in damped hyperbolic equations”, *Dynamic Systems and Applications*, 1, 221-250, 1992.
- [3] J. Sola-Morales & M. Valencia, “Trend to spatial homogeneity for solutions to semilinear damped wave equations”, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 105A, 117-126, 1987
- [4] R. S. Teles, “Atratores de trajetórias para algumas classes de equações diferenciais parciais”, Tese de Doutorado, IME-USP, 2012.
- [5] V. V. Chepyzhov & M. I. Vishik, “Attractors for equations of mathematical physics”, *Colloquium publications*, 49, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [6] V. V. Chepyzhov & M. I. Vishik, Global attractor and its perturbations for a dissipative hyperbolic equation, *Russian Journal of Mathematical Physics*, 8, (2001) 311-330.