Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Localização dos Zeros de Polinômios de Szegő com Coeficientes de Reflexão Maiores que Um em Módulo*

Regina L. Lamblém
UEMS - Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
79540-000, Cassilândia, MS
E-mail:lamblem@uems.br

Cleonice F. Bracciali
Depto. de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: bracciali@ibilce.unesp.br

Marisa S. Costa
UFU - Universidade Federal de Uberlândia
38408-100, Uberlândia, MG
E-mail: marisa@famat.ufu.br

Resumo: *Neste trabalho, apresenta-se resultados sobre a localização dos zeros dos polinômios de Szegő com coeficientes de reflexão maiores que um em módulo. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar os resultados.*

Palavras-chave: *Polinômios de Szegő, Coeficientes de Reflexão, Zeros de Polinômios*

1 Introdução

Com as publicações [15] e [16], no início do século XX, Szegő introduziu os polinômios ortogonais no círculo unitário, também chamados de polinômios de Szegő em sua homenagem. Os polinômios de Szegő podem ser definidos e estudados em termos de funcionais de momento, da seguinte forma:

Dada uma sequência $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de números complexos, chamados momentos, seja $\mathcal{M}$ um funcional de momento linear definido no espaço dos polinômios de Laurent por

$$\mathcal{M}[z^n] = \mu_n, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots. \tag{1}$$

Sejam Δ_n os determinantes de Toeplitz, dados por

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-2} & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \cdots & \mu_{-1} & \mu_0 \end{vmatrix}, \quad n \geq 1 \tag{2}$$

e a sequência de polinômios mônicos $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, definida como

(i) S_n é um polinômio de grau exatamente n,

$$(ii)\ \mathcal{M}[t^{-m}S_n(t)] = \begin{cases} 0, & m = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \\ \gamma_n \neq 0, & m = n, \end{cases} \qquad n \geq 1. \tag{3}$$

*Este trabalho tem apoio do CNPq.

Se $\mathcal{M}$ é tal que $\Delta_n \neq 0$, para $n \geq 0$, então a sequência de polinômios mônicos $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ existe e é única.

Quando μ_n são complexos tais que

$$\mu_{-n} = \overline{\mu}_n \ \text{ e } \ \Delta_n > 0, \quad n \geq 0,$$

os polinômios S_n associados ao funcional $\mathcal{M}$ que satisfazem (3) são os polinômios de Szegő. Neste caso, $\mathcal{M}$ pode ser representado por uma integral de Stieltjes em relação a uma medida positiva no círculo unitário.

Os polinômios de Szegő são também caracterizados por satisfazerem a uma relação de recorrência com coeficientes de reflexão $\delta_n = S_n(0)$, menores que um em módulo. Estes polinômios tem sido estudados por muitos pesquisadores, por exemplo, Cachafeiro, Marcellán, Pérez [3], Jones, Njåstad e Thron [7], Costa e outros [6], Sri Ranga [10], Simon [12, 13], Szegő [14] e Van Assche [17].

Em [9] e [11], considerou-se μ_n complexos tais que

$$\mu_{-n} = \mu_n \ \text{ e } \Delta_n \neq 0, \quad n \geq 0.$$

Neste caso, os polinômios S_n associados ao funcional $\mathcal{M}$ e que satisfazem (3) são chamados de polinômios tipo Szegő.

Agora, se o funcional $\mathcal{M}$ é tal que todos os μ_n são reais,

$$\mu_{-n} = \mu_n \quad \text{e} \quad (-1)^{n(n+1)/2}\Delta_n > 0, \quad n \geq 0,$$

então os polinômios S_n que satisfazem (3) são associados ao funcional $\mathcal{M}$ que pode ser representado por uma integral de Stieltjes associada a uma medida positiva no lado positivo (ou negativo) da reta real. Veja, por exemplo, os trabalhos de Andrade, McCabe e Sri Ranga [1], Bracciali, McCabe e Sri Ranga [2], Common e McCabe [5] e Vinet e Zhedanov [18].

Em [4] e [8], considerou-se a generalização deste último caso, quando μ_n são complexos e ainda vale

$$\mu_{-n} = \overline{\mu}_n \text{ e } (-1)^{n(n+1)/2}\Delta_n > 0, \quad n \geq 0.$$

Neste caso, os polinômios associados ao funcional $\mathcal{M}$ satisfazem à mesma relação de recorrência que os polinômios de Szegő, mas com coeficientes de reflexão $\delta_n = (-1)^n S_n(0)$ maiores que um em módulo, por isso, são chamados de polinômios de Szegő com coeficientes de reflexão maiores que um em módulo. Um problema deixado em aberto em [8] é o estudo dos zeros desses polinômios. O objetivo do presente trabalho é fornecer informações sobre a localização dos zeros dos polinômios de Szegő com coeficientes de reflexão maiores que um em módulo.

2 Polinômios de Szegő com coeficientes de reflexão maiores que um em módulo

Nesta seção serão apresentadas algumas propriedades dos polinômios de Szegő com coeficientes de reflexão maiores que um em módulo, por isso, considera-se uma sequência $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de números complexos tais que

$$\mu_{-n} = \overline{\mu}_n, \quad n \geq 0, \tag{4}$$

e os determinantes de Toeplitz, como definido em (2), com a propriedade

$$(-1)^{n(n+1)/2}\Delta_n > 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Seja o funcional de momento $\mathcal{M}$, como definido em (1). Quando valem as condições (4) e (5), $\mathcal{M}$ é chamado de funcional de momento sq-definido, o que significa "funcional de momento especial quase-definido". Quando os momentos são também reais o funcional $\mathcal{M}$ é chamado de funcional de momento rsq-definido, o que significa "funcional de momento real quase-definido" .

Define-se o polinômio recíproco de S_n por $S_n^*(z) = z^n\overline{S_n(1/\overline{z})}$.

A sequência de polinômios definida em (3) satisfaz

$$\mathcal{M}[t^{-m}S_n(t)] = \mathcal{M}[t^{-n+m}S_n^*(t)] = \begin{cases} 0, & 0 \leq m \leq n-1 \\ \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, & m = n \end{cases} \qquad n \geq 1. \tag{6}$$

Os polinômios S_n podem ser escritos em termos dos determinantes de Toeplitz como segue:

$$S_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \dots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \dots & \mu_1 \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix}, \quad n \geq 1 \;\text{ e }\; S_0(z) = 1. \tag{7}$$

O resultado a seguir pode ser encontrado em [4] e [8] e será usado para fornecer informações sobre a localização dos zeros desses polinômios.

Teorema 1 *Seja $\delta_n = (-1)^n S_n(0)$, para $n \geq 1$, conhecidos como coeficientes de reflexão, onde S_n são os polinômios de Szegő associados ao funcional de momento sq-definido $\mathcal{M}$ que satisfazem (6) . Os polinômios S_n na forma mônica satisfazem às seguintes relações de recorrência*

$$S_n^*(z) = (-1)^n\bar{\delta}_n z S_{n-1}(z) + S_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1, \tag{8}$$

$$S_n(z) = (-1)^n\delta_n S_n^*(z) - (|\delta_n|^2 - 1) z S_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \tag{9}$$

com as condições iniciais

$$S_0(z) = 1 \;\; e \;\; S_0^*(z) = 1.$$

Além disso, $|\delta_n| > 1$, para todo $n \geq 1$.

Por essa razão são também chamados de polinômios de Szegő com coeficientes de reflexão maiores que um em módulo.

Quando considera-se momentos $\mu_s, s = 0, \pm1, \pm2, \dots$, todos reais, ou seja, $\mathcal{M}$ um funcional de momento rsq-definido, através de (7) pode-se observar que os polinômios S_n são todos reais.

Sejam $z_{n,i},\ i = 1, 2, 3, \dots, n$ os zeros dos polinômios S_n associados ao funcional de momento rsq-definido. Em [4] e [8], mostrou-se que $z_{n,i},\ i = 1, 2, 3, \dots, n$ são reais, distintos e positivos, ou seja,

$$0 < z_{n,1} < z_{n,2} < \dots < z_{n,n-1} < z_{n,n}.$$

3 Localização dos zeros

O resultado a seguir, encontrado em [12], será usado para estabelecer o resultado sobre a localização dos zeros dos polinômios de Szegő com coeficientes de reflexão maiores que um em módulo.

Seja π, um polinômio, define-se por $N_<(\pi)$, $N_=(\pi)$ e $N_>(\pi)$ o número de zeros z_j, do polinômio π (contando a multiplicidade) tal que $|z_j| < 1$, $|z_j| = 1$ e $|z_j| > 1$, respectivamente.

Teorema 2 *Seja π, um polinômio mônico de grau n. Sejam α complexos e*

$$\zeta_\alpha(z) = z\pi(z) - \bar{\alpha}\pi^*(z), \tag{10}$$

então

i) se $|\alpha| < 1$, têm-se $N_<(\zeta_\alpha) = N_<(\pi) + 1$, $N_=(\zeta_\alpha) = N_=(\pi)$ e $N_>(\zeta_\alpha) = N_>(\pi)$.

ii) se $|\alpha| > 1$, têm-se $N_>(\zeta_\alpha) = N_<(\pi) + 1$, $N_=(\zeta_\alpha) = N_=(\pi)$ e $N_<(\zeta_\alpha) = N_>(\pi)$.

O próximo teorema foi proposto pelos autores desse trabalho. Nesse teorema, são dadas as informações sobre a localização dos zeros dos polinômios associados ao funcional de momento sq-definido $\mathcal{M}$.

Teorema 3 *Sejam S_n os polinômios de Szegő associados ao funcional de momento sq-definido $\mathcal{M}$.*
i) Se n é par, então S_n tem $\dfrac{n}{2}$ zeros fora do disco unitário e $\dfrac{n}{2}$ zeros dentro do disco unitário.
ii) Se n é ímpar, então S_n tem $\dfrac{n+1}{2}$ zeros fora do disco unitário e $\dfrac{n-1}{2}$ zeros dentro do disco unitário.

Demonstração. De (8) obtém-se a seguinte relação

$$S_n(z) = zS_{n-1}(z) + (-1)^n \delta_n S_{n-1}^*(z), \ n \geq 1. \tag{11}$$

Do Teorema 1, $S_1(z) = z - \delta_1$ e $|\delta_1| > 1$, assim o zero de S_1 está fora do disco unitário.

Note que a relação (11) é a relação (10) com

$$\zeta_\alpha(z) = S_n(z), \quad \pi(z) = S_{n-1}(z) \ \text{ e } \ \bar{\alpha} = (-1)^{n+1}\delta_n$$

Como $|(-1)^{n+1}\delta_n| > 1$, a relação (11), o item ii do Teorema 2 e a localização dos zeros de S_1 garantem que S_2 tem um zero fora do disco unitário e um zero dentro do disco unitário.

Analogamente, a relação (11), o item ii do Teorema 2 e a localização dos zeros de S_2 garantem que S_3 tem dois zeros fora do disco unitário e um zero dentro do disco unitário.

Portanto, o resultado do teorema segue pelo princípio de indução finita para n par e n ímpar.

■

O próximo resultado fornece mais detalhes sobre os zeros dos polinômios associados ao funcional de momento rsq-definido $\mathcal{M}$, e, segue diretamente dos resultados citados na seção anterior e do Teorema 3.

Corolário 1 *Sejam S_n os polinômios de Szegő associados ao funcional de momento rsq-definido $\mathcal{M}$.*
i) Se n é par, então S_n tem $\dfrac{n}{2}$ zeros no intervalo $(0,1)$ e $\dfrac{n}{2}$ em $(1,\infty)$.
ii) Se n é ímpar, então S_n tem $\dfrac{n+1}{2}$ zeros em $(1,\infty)$ e $\dfrac{n-1}{2}$ zeros em $(0,1)$.

Dois exemplos numéricos são dados para ilustrar o Teorema 3. Considerando-se os polinômios de Szegő associados ao funcional de momento sq-definido $\mathcal{M}$, com $\delta_n = (-1)^n S_n(0) = 1 + i$, na Figura 1 representa-se os zeros de S_7 e na Figura 2 representa-se os zeros de S_8.

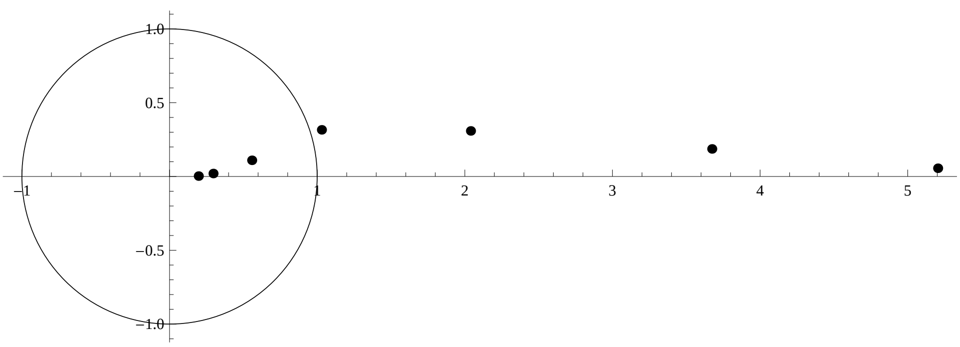

Figura 1: Os zeros do polinômio de Szegő S_7 associados ao funcional de momento sq-definido $\mathcal{M}$, com $\delta_n = 1 + i$.

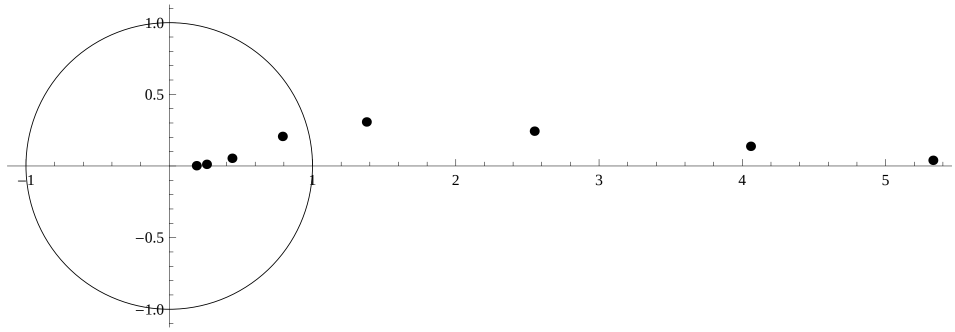

Figura 2: Os zeros do polinômio de Szegő S_8 associados ao funcional de momento sq-definido $\mathcal{M}$, com $\delta_n = 1 + i$.

Referências

[1] E. X. L. Andrade; J. McCabe; A. Sri Ranga, Some consequences of symmetry in strong distributions, *Journal of Mathematical Analysis Applications*, 193 (1995) 158-168.

[2] C. F. Bracciali; J. H. McCabe, A. Sri Ranga, On a symmetry in strong distributions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 105 (1999) 187-198.

[3] A. Cachafeiro; F. Marcellán, C. Pérez, Orthogonal polynomials with respect to the sum of Szegő arbitrary measure and Bernstein-Szegő measure. *Advances in Computational Mathematics*, 26 (2007).

[4] K. Castilho; R. L. Lambém; F. R. Rafaeli; A. Sri Ranga, Szegő and para-ortogonal polynomials on the real line: spectral transforms and zeros.*Applied Mathematics and Computation*, 81 (2012) 2229-2249.

[5] A. K. Common, J. H. McCabe, The symmetric strong moment problem, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 67 (1996) 327-341.

[6] M. S. Costa; E. Godoy; R. L. Lambém; A. Sri Ranga, Basic hypergeometric functions and orthogonal Laurent polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 140 (2012) 2075-2089.

[7] W. B. Jones, O. Njåstad e W. J. Thron, Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 21 (1989) 113-152.

[8] R. L. Lamblém, "Polinômios de Szegő quando os Coeficientes de Reflexão assumem Valores Maiores que Um em Módulo", Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP, 2008.

[9] R. L. Lamblém, "Polinômios Tipo Szegő", Tese de Doutorado, IBILCE-UNESP, 2011.

[10] A. Sri Ranga, Szegő polynomials from hypergeometric functions, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 138 (2010) 4259-4270.

[11] R. L. Lamblém; J. H. McCabe; M. A. Piñar; A. Sri Ranga, Szegő Type Polynomials and Para-orthogonal Polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 370 (2010) 30-41.

[12] B. Simon, Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Pat 1. American Mathematical Society Colloquium Publications, 54 (2004) parte 1, Providence.

[13] B. Simon, Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Pat 2. American Mathematical Society Colloquium Publications, 54 (2004) parte 2, Providence.

[14] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, $3^{\underline{rd}.}$ed., American Mathematical Society Colloquium Publications, 23 (1939), Providence.

[15] G. Szegő, Über Beirträge zur theorie der toeplitzschen formen. *Mathematische Zeitschrift* , 6 (1920) 167-202. MR1544404.

[16] G. Szegő, Über Beirträge zur theorie der toeplitzschen formen, II. *Mathematische Zeitschrift,* 9 (1921) 167-190. MR15444062.

[17] W. Van Assche, Orthogonal polynomials in the complex plane and the real line. Special Functions, q-series and Related Topics, M. E. H. Ismail et al., Ed., Field Institute Communications, American Mathematical Society, 14 (1997) 211-245.

[18] L. Vinet; A. Zhedanov, Szegő polynomials on the real axis, *Linear Algebra and Applied*, 8 (1999) 149-164.

