Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Sobre propriedades de invariância de uma nova equação dispersiva

Igor L. Freire,
CMCC - Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC,
09210-170, Santo André, SP
E-mail: igor.freire@ufabc.edu.br,

Júlio C. S. Sampaio
IMECC - Depto. de Matemática Aplicada, UNICAMP,
13083-859, Campinas, SP
E-mail: juliocesarssampaio@gmail.com.

Resumo: *Neste trabalho estudaremos propriedades de invariância de uma família de equações dispersivas. Um dos principais objetivos é encontrar as condições para que essas equações sejam não-linearmente auto-adjuntas e calcular suas leis de conservação. Além disso, encontraremos soluções invariantes para essas equações via simetrias de Lie.*

Palavras-chave: *Auto-adjunticidade não-linear, leis de conservação, equações dispersivas*

1 Introdução

No recente trabalho [4], foi estudada a seguinte família de equações dispersivas

$$u_t + \frac{2a}{u} u_x u_{xx} - \epsilon a u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

onde ϵ é um parâmetro e a uma constante. Essencialmente, podemos considerar ϵ como o coeficiente de dispersão da equação em questão.

No mesmo trabalho onde foi introduzida, algumas propriedades de tal equação foram consideradas, principalmente a construção de leis de conservação. De acordo com os resultados obtidos em [4], o caso $\epsilon = -2/3$ é um caso bastante especial, principalmente naquilo que tange a obtenção de leis de conservação.

Neste trabalho, estudaremos a equação (1) do ponto de vista de simetrias de Lie. De fato, mostraremos que os operadores

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \;\; X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \;\; X_3 = u\frac{\partial}{\partial u}, \;\; X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} \tag{2}$$

são geradores infinitesimais de simetrias de Lie.

Uma vez encontrado o grupo de invariância, há diversas possibilidades a serem consideradas. Uma delas, que será explorada, é a obtenção de soluções invariantes, exatas, usando os geradores infinitesimais de simetrias.

Outra possibilidade, que também será abordada é a construção de leis de conservação via geradores de simetrias. Para tanto, utilizaremos os desenvolvimentos propostos por Nail Ibragimov em [2].

A ideia para a construção de leis de conservação locais, introduzidas em [2], é, primeiramente, verificar se a equação considerada é não-linearmente auto-adjunta, veja [3]. Dessa forma, se positiva a questão, é possível, a partir dos geradores de simetrias, encontrar leis de conservação locais.

Na próxima seção mostraremos que tal equação é não-linearmente auto-adjunta, o que nos possibilitará encontrar leis de conservação locais utilizando [2].

2 Leis de conservação

"Na natureza nada se perde, nada se cria, tudo se transforma". Com essas palavras, Antoine Lavoisier enunciou a **lei de conservação de massa**, que diz que numa reação química, a quantidade de reagentes deve ser igual a quantidade de produtos.

Conhecemos outras leis de conservação frequentemente utilizadas, como a lei de conservação de energia, do momento linear e do momento angular.

Mas o que é uma lei de conservação? Basicamente uma lei de conservação é um balanceamento de alguma substância concreta ou abstratatamente. Em termos matemáticos, uma lei de conservação para uma EDP é um vetor cuja divergência se anula nas soluções dessa EDP.

Geralmente não é uma tarefa simples encontrar uma lei de conservação para uma EDP. Um resultado clássico conhecido para encontrar leis de conservação é o *Teorema de Noether*, que fornece um algoritimo para calcular leis de conservação via simetrias de Lie-Bäcklund. Tal resultado é entretanto restritivo, no sentido de que só pode ser aplicada a equações diferenciais advindas de uma integral de ação, e consequentemente essas equações diferenciais sempre são de ordem par.

Em 2009 Ibragimov propôs a seguinte definição em seu trabalho, veja [2].

Seja

$$F(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(k)}) = 0$$

uma equação diferencial parcial. A equação

$$F^*(x, u, v, u_{(1)}, v_{(1)}, \ldots, u_{(k)}, v_{(k)}) = \frac{\delta}{\delta u}\mathcal{L} = 0$$

é chamada equação adjunta à $F(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(k)}) = 0$, onde

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} - D_i \frac{\partial}{\partial u_i} + D_i D_j \frac{\partial}{\partial u_{ij}} + \ldots (-1)^k D_{i_1} \ldots D_{i_k} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \ldots i_k}},$$

é o operador de Euler-Lagrange e $\mathcal{L} = vF(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(k)})$ é chamada de lagrangeana formal, onde $v = v(x)$ é uma nova variável dependente.

No mesmo trabalho, Ibragimov provou que o vetor

$$\begin{aligned} C^i &= \xi^i \mathcal{L} + W \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - D_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}} \right) + D_j D_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}} - \cdots \right] \\ &\quad + D_j(W) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}} - D_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}} \right) + \cdots \right] \\ &\quad + D_j D_k(W) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}} - \cdots \right] + \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

e $W = \eta - \xi^i u_i$, é um vetor conservado para o sistema de equações formado pela EDP e sua respectiva equação adjunta, onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u = u(x)$ e $u_{(k)}$ o conjunto de todas as derivadas parciais de k-ésima ordem de u. Também está sendo usada a conveção da soma de Einstein, onde índices repetidos devem ser somados.

Este resultado de Ibragimov é em certo sentido mais geral, uma vez que pode ser aplicada a uma EDP qualquer, lembrando entretanto que os vetores conservados são agora para o sistema de equações e não para a EDP propriamente dita.

Em 2011 Ibragimov [3] desenvolveu a seguinte definição:

Definição 1. *Uma EDP é dita ser não-linearmente auto-adjunta, se a seguinte condição é satisfeita:*

$$F^*(x,u,v,u_{(1)},v_{(1)},\ldots,u_{(k)},v_{(k)})\Big|_{v=\phi(x,u)} = \lambda F(x,u,u_{(1)},...,u_{(k)}), \tag{4}$$

onde $\lambda = \lambda(x,u,\ldots)$ *e* $\phi(x,u) \neq 0$. *A função* ϕ *que satisfaz* (4) *é chamada substituição.*

Se uma EDP

$$F(x,u,u_{(1)},\ldots,u_{(k)}) = 0$$

é não-linearmente auto-adjunta, (3) é um vetor conservado para $F(x,u,u_{(1)},\ldots,u_{(k)}) = 0$, quando substituímos $v = \phi(x,u)$ em (3).

Exemplo 1. *A equação*

$$u_t + uu_{xxx} = 0. \tag{5}$$

é não-lineramente auto-adjunta. A expressão para ϕ *é dada por*

$$\phi(x,t,u) = c_1\left(\frac{x^3}{u} - 6t\right) + c_2\frac{x^2}{u} + c_3\frac{x}{u} + \frac{c_4}{u} + c_5,$$

veja [1].

Considerando o gerador de simetrias de Lie

$$X = t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}, \tag{6}$$

as componentes dadas por (3) *nos fornece*

$$\begin{aligned} C^0 &= v(tuu_{xxx} - u), \\ C^1 &= v(-2uu_{xx} + u_x^2 + tu_xu_{xt} - tuu_{xxt} - tu_tu_{xx}) \\ &\quad + v_x(tuu_{xt} - 2tu_xu_t - uu_x) - v_{xx}(u^2 + tuu_t). \end{aligned} \tag{7}$$

Substituindo $v = 1$ *em* (7) *e após alguns calculos, temos*

$$\begin{aligned} C^0 &= -u - D_x\left(\frac{tu_x^2}{2} - tuu_{xx}\right), \\ C^1 &= -uu_{xx} + \frac{u_x^2}{2} + D_t\left(\frac{tu_x^2}{2} - tuu_{xx}\right). \end{aligned}$$

Então, transferindo os termos $D_t(\cdots)$ *de* C^0 *e* C^1, *obtemos as seguintes expressões*

$$C^0 = u, \;\; C^1 = uu_{xx} - \frac{u_x^2}{2}.$$

Vamos verificar que (1) é não linearmente auto-adjunta. Usando o Teorema 2 de [1], obtemos o seguinte sistema de equações

$$\phi_t - \epsilon a\phi_{xxx} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{2}{u}\phi_x + 3\epsilon\phi_{xu} = 0, \tag{9}$$

$$\epsilon a\phi_{xuu} = 0, \tag{10}$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0025

$$2\left(\frac{\phi}{u}\right)_u + \epsilon\phi_{uu} = 0, \tag{11}$$

Da equação (10) (supondo $a \neq 0$ e $\epsilon \neq 0$) temos

$$\phi_{xuu} = 0 \Rightarrow (\phi_x)_{uu} = 0 \Rightarrow \phi_x = A(x,t)u + B(x,t)$$

$$\phi(x,t,u) = \psi(x,t)u + \varphi(x,t) + \rho(t,u), \tag{12}$$

onde $\psi(x,t) = \int A(x,t)dx$ e $\varphi(x,t) = \int B(x,t)dx$.

Substituindo (12) em (10), temos

$$\left(1 + \frac{3}{2}\epsilon\right)\psi_x = 0, \tag{13}$$

$$\varphi_x = 0, \tag{14}$$

Da equação (14) concluímos que $\varphi = \varphi(t)$. A partir da equação (13), podemos considerar dois casos. O primeiro é quando $\epsilon \neq -\frac{2}{3}$, neste caso devemos ter $\psi_x = 0$ e logo $\psi = \psi(t)$. Portanto

$$\phi(x,t,u) = \phi(t,u) = \psi(t)u + \varphi(t) + \rho(t,u). \tag{15}$$

Substituindo (15) em (9), obtemos $\psi' u + \varphi' + \rho_t = 0$ o que implica em

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi(t)u + \varphi(t) + \rho(t,u)\right) = 0.$$

Assim $\psi(t)u + \varphi(t) + \rho(t,u) = k(u)$, ou seja, $\phi = \phi(u)$. Então a partir da equação (11) obtemos a seguinte EDO

$$u^2 k'' + \frac{2}{\epsilon}uk' - \frac{2}{\epsilon}k = 0, \tag{16}$$

cuja solução é

$$k(u) = c_1 u + c_2 u^{-\frac{2}{\epsilon}}, \tag{17}$$

se $\epsilon \neq -2$. Se $\epsilon = -2$, temos a seguinte solução para (16)

$$k(u) = c_1 u + c_2 ln(u)u. \tag{18}$$

Portanto concluímos que $\phi(u) = c_1 u + c_2 u^{-\frac{2}{\epsilon}}$ quando $\epsilon \neq -2$ e $\phi(u) = c_1 u + c_2 ln(u)u$ quando $\epsilon = -2$, onde c_1 e c_2 são constantes reais.

Se $\epsilon = -2/3$, a partir da equação (11), obtemos

$$u^2\rho_{uu} - 3u\rho_u + 3\rho = -3\varphi. \tag{19}$$

Para cada t fixo e arbitrário, a equação (19) é uma EDO em u, onde a solução geral é dada por

$$\rho(t,u) = k_1(t)u + k_2(t)u^3 - \varphi(t). \tag{20}$$

Sunstituindo (20) na expressão de ϕ, obtemos

$$\phi(x,t,u) = \left(\psi(x,t) + k_1(t)\right)u + k_2(t)u^3, \tag{21}$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0025

A partir da equação (8), concluímos que

$$\left(\psi_t + \frac{2}{3}a\psi_{xxx} + k_1'\right)u + k_2'u^3 = 0,$$

logo $k_2' = 0$ o que implica que $k_2(t) = c = constante$ e ψ e k_1 cumprem a seguinte EDP

$$\psi_t + \frac{2}{3}a\psi_{xxx} + k_1' = 0.$$

Neste trabalho, além da classificação em relação à auto-adjunticidade não-linear, também encontramos, utilizando os geradores de simetrias de Lie (2) as correspondentes leis de conservação para a equação (1).

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP pelo suporte financeiro, através do processo nº 2011/23538-0. I. L. Freire agradece à FAPESP, processo nº 2011/19089-6 e ao CNPQ, processo nº 308941/2013-6.

Referências

[1] I. L. Freire and J. C. Santos Sampaio, On the nonlinear self-adjointness and local conservation laws for a class of evolution equations unifying many models, *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul.*, 19, (2014) 350–360.

[2] N. H. Ibragimov, A new conservation theorem, *J. Math. Anal. Appl.*, 333, (2007) 311–328.

[3] N. H. Ibragimov, Nonlinear self-adjointness and conservation laws,*J. Phys. A Math. Theor.*, 44 (2011) 8pp.

[4] A. Sen, D. P. Ahalpara, A. Thyagaraja and G. S. Krishnaswami, A KdV-like advection-dispersion equation with some remarkable properties, *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul.*, 17, (2012) 4115–4124.

