Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Comparações entre o Teorema de Noether e o Teorema de Ibragimov utilizando uma classe de equações diferenciais ordinárias

Priscila L. da Silva, **Igor L. Freire**,
Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC,
09210-580, Santo André, SP
E-mail: priscila.silva@ufabc.edu.br, igor.freire@ufabc.edu.br,

Resumo: Neste trabalho comparamos quantidades conservadas obtidas via Teorema de Noether e Ibragimov. Para tanto, usamos resultados de nossa autoria [I. L. Freire, P. L. da Silva and M. Torrisi, "Lie and Noether symmetries for a class of fourth-orderEmden-Fowler equations", J. Phys. A: Math Theor., 46(2013)245206] e [P. L. da Silva and I. L. Freire, "Symmetry analysis of a class of autonomous even-order ordinary differential equations", arXiv:1311.0313v1, (2013)], onde encontramos todas as primeiras integrais obtidas via Teorema de Noether. Em seguida, para a mesma equação, aplicamos os desenvolvimentos propostos por Ibragimov nos últimos 7 anos a fim de encontrar quantidades locais conservadas. Dessa forma, podemos comparar os se resultados obtidos em ambos os casos coincidem ou não.

Palavras-chave: *Teorema de Noether, Teorema de Ibragimov, primeiras integrais*

1 Introdução

No começo do século XX, a matemática alemã Emmy Noether mostrou a conexão entre as simetrias de uma integral de ação (simetrias variacionais ou de divergência) e as quantidades conservadas para as equações de Euler-Lagrange correspondentes.

Noether provou que toda lei de conservação de uma equação diferencial, ou sistema, advém de uma correspondente propriedade de simetria da mesma. Para a aplicação do Teorema de Noether a uma equação diferencial, uma condição necessária é a existência de uma Lagrangeana à qual a equação seja obtida via equações de Euler-Lagrange. Neste caso, diz-se que a equação vem de um princípio variacional e que tem estrutura variacional.

Além disso, considerando equações diferenciais com estrutura variacional, o Teorema de Noether só é aplicável quando a simetria associada possui determinadas propriedades. Tais simetrias são chamadas simetrias de Noether. Porém, nem todas as equações diferenciais possuem estrutura variacional, como, por exemplo, é o caso de equações de ordem ímpar. Vemos então uma grande restrição ao Teorema de Noether.

No começo do século XXI, na tentativa de generalizar o Teorema de Noether, Ibragimov em [1] propôs o que ele chamou de *"a new conservation theorem"*, chamado de Teorema de Ibragimov. Nesse novo teorema, considerando uma equação diferencial, possuindo Lagrangeana ou não, leis de conservação não-locais foram encontradas utilizando a mesma quantidade conservada fornecida pelo Teorema de Noether.

Quando falamos em leis de conservação não-locais, estamos falando de quantidades que possuem uma nova variável que não se relaciona, num primeiro momento, com a equação diferencial originalmente estudada. Assim, apesar de estender de certa maneira o Teorema de Noether, as leis de conservação não-locais fornecidas pelo Teorema de Ibragimov não trazem muita informação, uma vez que inserimos uma variável que não está presente no problema inicialmente estudado.

Após a publicação de seu teorema, Ibragimov definiu alguns conceitos de auto-adjunticidade [1, 2, 3] para equações diferenciais. Se a equação diferencial estudada é auto-adjunta, então conseguimos remover a variável não-local e transformar a lei de conservação não-local em uma local.

O Teorema proposto por Ibragimov, bem como o Teorema de Noether, não possui nenhuma restrição quanto a equações (sistemas) diferenciais ordinárias ou parciais, e apesar de o Teorema de Noether ser uma ferramenta com relevante utilização na literatura no estudo de EDOs, há poucas aplicações do Teorema de Ibragimov a EDOs.

Para equações diferenciais parciais cuja aplicação do Teorema de Noether é possível, o Teorema de Ibragimov não necessariamente reproduz as leis de conservação de Noether, apesar da "proximidade" entre os dois Teoremas. A pergunta que naturalmente surge é: como essa possível ausência de relação entre as leis de conservação (primeiras integrais no caso de equações diferenciais ordinárias) encontradas pelos dois Teoremas se comporta no caso de EDOs?

Tentaremos responder esta pergunta por meio dos seguintes passos: em [4] e [5] encontramos primeiras integrais da equação

$$y^{(2n)}(x) = ay^p(x), \tag{1}$$

com $a, p \in \mathbb{R}, a \neq 0, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, via Teorema de Noether. Então, neste trabalho, aplicaremos a teoria de Ibragimov para encontrar primeiras integrais locais.

Logo, precisamos determinar as subclasses de (1) que são não-linearmente auto-adjuntas. Nas próximas seções apresentaremos nossos resultados obtidos em [4, 5] e determinaremos quando a EDO (1) é não-linearmente auto-adjunta.

2 Teorema de Noether e primeiras integrais

Considere uma equação diferencial ordinária,

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(k)}(x)) = 0, \tag{2}$$

com estrutura variacional, ou seja,

$$F = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta y} = 0,$$

onde $\frac{\delta}{\delta u}$ é o operador de Euler-Lagrange dado pela soma formal

$$\frac{\delta}{\delta y} = \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_x^s \frac{\partial}{\partial y^s}, \tag{3}$$

onde

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} + \ldots,$$

é o operador derivada total, $D_x^2 = D_x D_x, D_x^3 = D_x D_x^2, \ldots, D_x^k = D_x D_x^{k-1}$ e $\mathcal{L}$ é uma lagrangeana de ordem p.

Podemos enunciar o Teorema de Noether da seguinte maneira:

Teorema 1 (*Teorema de Noether*). *Se*

$$X = \xi(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) \frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial y'} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial y''} + \ldots, \tag{4}$$

com $\zeta_i = D_x^i(\eta - \xi y') + \xi y^{(i+1)}$, *é um operador de Lie-Bäcklund admitido pela equação* (2) *satisfazendo a relação*

$$X\mathcal{L} + \mathcal{L} D_x(\xi) = D_x(A), \tag{5}$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0020

onde $A = A(x, y, y' \ldots, y^{(n)})$ *é chamado potencial, então associada ao operador* X *existe uma quantidade conservada dada por*

$$I = A - \xi\mathcal{L} - (\eta - y'\xi)\frac{\delta}{\delta y'}\mathcal{L} - D(\eta - y'\xi)\frac{\delta}{\delta y''}\mathcal{L} + \cdots . \tag{6}$$

Se (4) satisfaz a condição (5), então ele é chamado de gerador de simetria variacional (se $A \equiv 0$) ou de gerador de simetria de divergência (caso contrário).

Se o operador (4) for tal que $\xi = \xi(x, y)$ e $\eta = \eta(x, y)$, então dizemos que ele é um gerador de simetria (ou infinitesimal) admitido pela equação diferencial $F = 0$. Quando falamos em um operador (4) admitido por uma equação diferencial, neste caso ordinária, estamos dizendo que existe $\lambda = \lambda(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$ tal que $XF = \lambda F$.

Quando exponenciamos um gerador de simetria X admitido por $F = 0$, isto é, $e^{\epsilon X}(x, y) =: T(x, y, \epsilon)$, obtemos uma transformação uniparamétrica que deixa $F = 0$ invariante no sentido de que sua ação sobre uma solução $y = y(x)$ da equação leva em uma nova solução a 1-parâmetro $\overline{y} = \overline{y}(x, \epsilon)$.

A seguir, enunciaremos alguns resultados provados em [5].

Teorema 2. *Os geradores de simetria da equação diferencial ordinária* (1) *são simetrias variacionais ou de divergência se, e somente se,*

$$p = \frac{1 + 2n}{1 - 2n}.$$

Além disso, também mostramos em [5] que os geradores de simetria de (1), com p dado pelo Teorema 2, são dados por

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2n - 1}{2}y\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{e} \quad X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + (2n - 1)xy\frac{\partial}{\partial y}, \tag{7}$$

tornando os geradores encontrados para a equação de Emden-Fowler, veja [4], casos particulares de (7).

Desta maneira pudemos encontrar, via Teorema de Noether, as primeiras integrais associadas aos geradores de simetria de

$$y^{(2n)} = ay^{(1+2n)/(1-2n)}. \tag{8}$$

Teorema 3. *As primeiras integrais da equação* (8) *associadas aos geradores* (7) *são dadas, respectivamente, por*

$$I_1 = \frac{(y^{(n)})^2}{2} + (-1)^n\lambda\frac{1 - 2n}{2}y^{\frac{2}{1-2n}} + \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}y^{(j+1)}y^{(2n-j-1)}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} I_2 \;=\; & x\frac{(y^{(n)})^2}{2} + (-1)^n\lambda x\frac{(1 - 2n)}{2}y^{\frac{2}{1-2n}} \\ & + \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j-1}\left(\frac{2n - 2j - 1}{2}y^{(j)} - xy^{(j+1)}\right)y^{(2n-j-1)}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} I_3 \;=\; & \frac{x^2}{2}(y^{(n)})^2 + (-1)^n\lambda x^2\frac{1 - 2n}{2}y^{\frac{2}{1-2n}} - \frac{n^2}{2}(y^{(n-1)})^2 \\ & \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j-1}\left[j(2n - j)y^{(j-1)} + (2n - 2j - 1)xy^{(j)} - x^2y^{(j+1)}\right]y^{(2n-j-1)}. \end{aligned} \tag{11}$$

3 Teorema de Ibragimov e primeiras integrais

3.1 Auto-adjunticidade

Em [1, 2], Ibragimov definiu a equação adjunta da equação diferencial $F = 0$, denotada por $F^* = 0$, como sendo

$$F^* = \frac{\delta}{\delta y}\overline{\mathcal{L}},$$

onde $\overline{\mathcal{L}} = vF$ é chamada de Lagrangeana formal, v é uma nova variável não-local e $\frac{\delta}{\delta y}$ é o operador de Euler-Lagrange (3).

Também em [1, 2], ele propôs a seguinte definição:

Definição 1. *A equação diferencial $F = 0$ é dita ser estritamente auto-adjunta se existe função $\alpha = \alpha(x, y, y', \ldots, y^{(k)})$, para algum $k \in \mathbb{N}$, tal que*

$$F^*\Big|_{v=y(x)} = \alpha F. \tag{12}$$

Pensando em casos de equações que não eram estritamente auto-adjuntas, como o caso da equação do calor, e suas consequências em leis de conservação, Ibragimov em [3] propôs uma nova definição que contemplasse a Definição 1, mas que também englobasse casos de equações que não se encaixavam nela.

Definição 2. *A equação diferencial $F = 0$ é dita ser não-linearmente auto-adjunta se existem funções $\phi = \phi(x, y) \neq 0$ e $\alpha = \alpha(x, y, y', \ldots, y^{(k)})$, para algum $k \in \mathbb{N}$, tais que*

$$F^*\Big|_{v=\phi(x,y)} = \alpha F. \tag{13}$$

Ibragimov também mostrou que as simetrias da equação diferencial ordinária $F = 0$ são herdadas pela sua adjunta $F^* = 0$ e que, além disso, são simetrias variacionais ou de divergência do sistema

$$\begin{cases} F = 0, \\ F^* = 0, \end{cases} \tag{14}$$

com Lagrangeana $\overline{\mathcal{L}} = vF$. Assim, estamos nas condições do Teorema de Noether e a quantidade (6) é uma quantidade conservada não-local para o sistema (14). Esse é o chamado *Teorema de Ibragimov*, uma extensão do Teorema de Noether.

Entretanto, se a equação diferencial $F = 0$ for não-linearmente auto-adjunta, então conseguimos eliminar a variável não local v fazendo a substituição necessária para que $F = 0$ seja não-linearmente auto-adjunta, veja [3]. Desta forma, (6) se torna uma primeira integral local para a equação $F = 0$.

Com relação a equação (1), temos o seguinte resultado:

Teorema 4. *A equação diferencial ordinária $y^{(2n)} = ay^p$ é estritamente auto-adjunta se, e somente se, $p = 1$ ou a=0.*

4 Conclusões

Comparando os teoremas apresentados, podemos verificar que embora possuam métodos semelhantes de obtenção das primeiras integrais, os dois Teoremas não estão obtendo os mesmos resultados. Mais do que isso, nos casos em que o Teorema de Noether é aplicável, não é possível aplicar o Teorema de Ibragimov para a construção de primeiras integrais *locais*.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0020

Desta forma, respondemos a pergunta inicialmente proposta: não, o Teorema de Noether e o de Ibragimov não necessariamente fornecem as mesmas primeiras integrais para EDOs. Neste caso, o valor $p = (1+2n)/(1-2n)$ fornece, via Teorema de Ibragimov, apenas primeiras integrais não-locais.

Logo, o Teorema de Ibragimov não pode ser considerado como uma extensão do Teorema de Noether e sim uma possível alternativa para a tentativa de encontrar novas primeiras integrais ou para os casos em que o Teorema de Noether não seja aplicável.

5 Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP pelo suporte financeiro através dos processos 2011/19089-6 e 2012/22725-4. I. L. Freire agrade ao CNPQ, processo nº 308941/2013-6

Referências

[1] N. H. Ibragimov, A new conservation theorem, *J. Math. Anal. Appl.*, 333 (2007) 311–328.

[2] N. H. Ibragimov, Integrating factors, adjoint equations and Lagrangians, *J. Math. Anal. Appl.* 318 (2006) 742–757.

[3] N. H. Ibragimov, Nonlinear self-adjointness and conservation laws, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 44 (2011) 8pp.

[4] I. L. Freire, P. L. da Silva and M. Torrisi, Lie and Noether symmetries for a class of fourth-order Emden-Fowler equations, *J. Phys. A: Math Theor.*, 46 (2013) 245206.

[5] P. L. da Silva and I. L. Freire, Symmetry analysis of a class of autonomous even-order ordinary differential equations, arXiv:1311.0313v1, (2013).

