Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Aplicação do Teorema de Ponto Fixo de Banach a uma Equação de Múltiplos Pontos de Fronteira

Marcelo R. A. Ferreira* **André L. M. Martinez** **Douglas B. Costa**
Coordenação de Matemática, COMAT, UTFPR,
86300-000, Cornélio Procópio, PR
E-mail: marceloraferreira@gmail.com, andrelmmartinez@yahoo.com, britocostadouglas@gmail.com.

RESUMO

No presente trabalho, apresentamos o estudo de um problema clássico de valor de fronteira não linear com múltiplos pontos, faremos uso do Teorema de Banach para demonstrar a existência e a unicidade de solução para a seguinte equação:

$$\begin{cases} u'' + f(t,u,u') = 0 \\ u(0) = 0 \quad , u(L) = g(u(\eta_1), u(\eta_2), \cdots, u(\eta_{m-2})) \end{cases} \tag{1}$$

onde $L > 0$ sendo que g: $\mathbb{R}^{m-2} \to \mathbb{R}$ e $f : [0, L] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e possivelmente não lineares, equações desse gênero, ou seja, com múltiplos pontos surgem em problemas que modelam fluxos viscoelásticos, inelásticos e deformação de vigas (recomendamos[1], [2] e [3]).

Vamos determinar solução para (1) baseado nos resultados apresentados em [4], trabalharemos no conjunto $E = C^1[0, L]$, isto é, o espaço de Banach de todas as funções continuamente diferenciáveis em $[0, L]$ com a norma: $\|u\|_E = \max\left\{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty\right\}$. Note que as soluções de (1) podem ser escritas como:

$$u(x) = \int_0^L G(x,t) f(t, u(t), u'(t))dt + g(u(\eta_1), u(\eta_2), ..., u(\eta_{m-2}))\frac{x}{L},$$

onde G é a função de Green $G(x,t) = \begin{cases} t(L-x)L^{-1}, & 0 \le t \le x \le L \\ x(L-t)L^{-1}, & 0 \le x \le t \le L \end{cases}$. Deste modo u é solução de (1) se é um ponto fixo do operador $T : E \to E$ definido como:

$$(Tu)(x) = \int_0^L G(x,t) f(t, u(t), u'(t))dt + g(u(\eta_1), u(\eta_2), ..., u(\eta_{m-2}))\frac{x}{L}. \tag{2}$$

Note que G possui a seguinte propriedade: $G(x,t) = |G(x,t)| \le L|\partial_x G(x,t)|$, logo podemos verificar que T cumpre:

$$|(Tu)'(x)| \le \int_0^L |\partial_x G(x,t)||f(t, u(t), u'(t))|dt + |g(u(\eta_1), u(\eta_2), ..., u(\eta_{m-2}))|L^{-1}. \tag{3}$$

Vamos estabelecer a existência e unicidade de solução aplicando o Teorema do ponto fixo de Banach. Para isto consideraremos a sequência iterativa

$u^{k+1} = T(u^k)$,

$u^{k+1}(x) = \int_0^L G(x,t) f(u^k(t), u'^k(t))dt + g(u^k(\eta_1), u(\eta_2), ..., u^k(\eta_{m-2}))\frac{x}{L}$.

Serão necessárias as seguintes hipóteses:

(H1) Existem constantes positivas α, A e B tais que:

- $\max\limits_{(t,u,v)\in[O,L]\times[-\alpha,\alpha]} \{|f(t,u,v)|\} \le \dfrac{\alpha A}{L d_1}$ onde $d_1 = \max\limits_{x\in[0,L]} \left\{\int_0^L |\partial_x G(x,t)|dt\right\}$;

*Voluntário de Iniciação Científica PIBIC-UTFPR

- $|g(y)| \leq \dfrac{\alpha B}{L}, \forall\, y \in [0,\alpha]^{m-2}$;
- $A + B \leq 1$.

(H2) Existem constantes $\lambda_f > 0$ e $\lambda_g > 0$ tais que:

- $|f(t,u_1,v_1) - f(t,u_2,v_2)| \leq \lambda_f \max\{|u_1-u_2|\,,\,|v_1-v_2|\}$;
- $|g(y_1) - g(y_2)| \leq \lambda_g |y_1 - y_2|$, para todo $t \in [0,L], u_1,v_1,u_2,v_2 \in [-\alpha,\alpha]$ e $y_1,y_2 \in [-\alpha,\alpha]$.

(H3) Vale a seguinte desigualdade $Ld_1\lambda_f + \lambda_g < 1$.

Teorema 1. *Suponha que H1, H2 e H3 ocorram. Então (1) possui uma solução única u tal que* $\|u\|_E \leq \alpha$. *Além disso esta solução é o limite da sequência iterativa* $u^{k+1} = T(u^k)$.

Demonstração: Primeiro mostraremos que T aplica $\overline{\Omega}$ em $\overline{\Omega}$ para $\Omega = \{u \in E; \|u\|_E < \alpha\}$, de fato

$$\begin{aligned}
\|(Tu)(x)\|_E &\leq L\|(Tu)'\|_\infty \\
&\leq L \max_{x\in[0,L]} \left\{ \int_0^L |\partial_x G(x,t) f(t,u(t),u'(t))|dt + |g(u(\eta_1),u(\eta_2),...,u(\eta_{m-2}))| \right\} \\
&\leq L \left\{ \frac{\alpha A}{Ld_1} \int_0^L |\partial_x G(x,t)|dt + \frac{\alpha B}{L} \right\} \leq \alpha A + \alpha B \leq \alpha.
\end{aligned}$$

Mostremos agora que T é uma contração:

$$\begin{aligned}
\|Tu - Tv\|_E &\leq L\|(Tu-Tv)'\|_\infty \\
&= L \max_{x\in[0,L]} \left\{ \left| \int_0^L \partial_x G(x,t)[f(t,u(t),u'(t) - f(t,v(t),v'(t))]dt \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \frac{1}{L}[g(u(\eta_1),...,u(\eta_{m-2})) - g(v(\eta_1),...,v(\eta_{m-2}))] \right| \right\}.
\end{aligned}$$

Aplicando desigualdade triangular, propriedade do módulo entre integrais, (H1) e (H2), temos:

$$\begin{aligned}
\|Tu - Tv\|_E &\leq L \max_t d_1 |f(t,u(t),u'(t)) - f(t,v(t),v'(t))| \\
&\quad + L^{-1}|g(u(\eta_1),...,u(\eta_{m-2})) - g(v(\eta_1),...,v(\eta_{m-2}))| \\
&\leq Ld_1\lambda_f \max\{|u(t)-v(t)|, |u'(t)-v'(t)|\} + L^{-1}\lambda_g \max_t \{|u(t)-v(t)|\} \\
&\leq (Ld_1\lambda_f + \lambda_g)\|u-v\|_E.
\end{aligned}$$

Então por (H3) temos que T é uma contração, concluímos então o resultado pelo Teorema do ponto fixo de Banach. $\square$

Além desse estudo ter sido desenvolvido por diversos autores, a importância desse tema se faz nas aplicações das equações de múltiplos pontos de fronteira citadas em [2] e pelos algoritmos que podem ser desenvolvidos utilizando do Teorema do Ponto Fixo de Banach pretendemos realizar testes numéricos seguindo as mesma linhas de [4].

Palavras-chave: *Teorema de Banach, Função de Green, Ponto fixo*

Referências

[1] Y. Lin & M. Cio. A numerical solution to nonlinear multi-point boundary value problems in the reproducing kemel space. Mathematical Methods in Applied Sciences. 34 (2011). 44-47

[2] R.P. Agarwal, M. Meehan & D.O'Regan. "Fixed Point Theory and Applications". Cambridge University Press, Cambridge (2011).

[3] R. Ma. Existence theorems for a second order m-point boundary value problem. J. Math. Anal. Appl., 211(1997),430-442.

[4] A.L.M. Martinez , C.A.P. Martinez , T.S. Pinto & E.V. Castelani. Um estudo de soluções para um problema de segunda ordem com múltiplos pontos de fronteira. Trends in Applied and Computational Mathematics, v. 14, n. 2, p. 9, 2013.

