

Aplicação de esquemas Galerkin Descontínuo em problemas hiperbólicos em 2D

Isamara Landim Nunes Araujo¹

MCCT/UFF, Volta Redonda, RJ - IMECC/UNICAMP, Campinas, SP

Panters Rodriguez Bermúdez²

UFF, Volta Redonda, RJ

Eduardo Cardoso de Abreu³

IMECC/UNICAMP, Campinas, SP

Yoisell Rodríguez Núñez⁴

UFF, Volta Redonda, RJ

Resumo. Neste trabalho utilizamos o método de elementos finitos Galerkin Descontínuo Runge-Kutta (RKDG) em uma malha triangular para obter soluções numéricas para problemas hiperbólicos em 2D, em particular para leis de conservação escalares e para o sistema de leis de balanço *shallow water*. Este método consiste na discretização espacial através do método Galerkin Descontínuo e na aplicação da aproximação Runge-Kutta de terceira ordem no tempo. A formulação do método Galerkin Descontínuo utiliza uma abordagem local, visto que a abordagem global não é capaz de lidar com a formação de choque e a interação das ondas. A utilização deste método requer a aplicação do limitador TVB para retirar as oscilações espúrias geradas, e no caso em que a variável conservada/balanceada é limitada será necessário também a aplicação do limitador *positive preserving*. Para calcular as integrais requeridas uma quadratura Gaussiana especial foi aplicada, de forma a satisfazer a condição CFL que garante a convergência do método numérico.

Palavras-chave. Leis de Conservação, Método Galerkin Descontínuo, TVB Runge-Kutta, Propriedade *Well-Balanced*, *Shallow Water Equations*, Equação de Burgers sem viscosidade.

1 Introdução

A modelagem de diversos fenômenos físicos é frequentemente baseada no fato de que certas quantidades são conservadas ou balanceadas. As equações que expressam a conservação e balançamento de uma quantidade física são conhecidas como leis de conservação e balanço, respectivamente. Dentre as muitas leis de conservação e balanço conhecidas podemos citar as equações de advecção linear, de Burgers e o sistema *shallow water* (SW) [1, 6, 7, 9].

Uma das dificuldades em se resolver as leis de conservação/balanço é que a solução destas possuem descontinuidades, de forma que seja necessário utilizar um método capaz de capturar essas descontinuidades sem introduzir oscilações espúrias que prejudiquem a qualidade da aproximação. No caso das leis de balanço outra dificuldade adicional é o tratamento do termo fonte, o esquema numérico deve ser capaz de preservar o equilíbrio entre o termo fonte e o fluxo, e assim capturar bem o estado estacionário, ou seja o método deve ser *well-balanced*. Se tratando das equações SW

¹isamara-landim@hotmail.com.

²pantersrb@id.uff.br.

³eabreu@unicamp.br.

⁴yoisellrn@id.uff.br.

outra dificuldade importante frequentemente encontrada nas simulações é o aparecimento de áreas secas. Muitas aplicações em *shallow water* envolvem interfaces que se movem rapidamente entre áreas úmidas e secas, tais como quebras de barragens e ondas de inundação. Atenção especial deve ser dada, caso contrário os métodos podem falhar perto da frente seca/molhada e podem produzir uma altura de água negativa inaceitável, e tornar o sistema não hiperbólico e mal posto [10, 11].

Dentre os vários métodos desenvolvidos podemos destacar o método dos elementos finitos Galerkin Descontínuo (DG) que é capaz de obter a solução estacionária, e ao mesmo tempo preservar a positividade da altura da água. Uma vez que estamos trabalhando com problemas hiperbólicos, de forma a obtermos formação de choques e interação de ondas, o método Galerkin Contínuo não é capaz de lidar com essas soluções descontínuas. Com efeito o método Galerkin Descontínuo foi desenvolvido para corrigir essa falha, de maneira que o método DG use uma abordagem local e não a formulação global, geralmente utilizadas em métodos de elementos finitos clássicos. O uso de uma abordagem global, nesses métodos clássicos para problemas hiperbólicos, requer que o método seja estabilizado, tais métodos são estabilizados ad hoc, ou seja faz-se a inclusão de uma difusão numérica artificial para forçar uma suavidade na solução, porém essa formulação só funciona bem em alguns casos particulares. Por tal motivo, neste trabalho usamos o método Galerkin Descontínuo [5, 10, 12] que utiliza uma formulação local.

2 Um estudo do método de elementos finitos Galerkin Descontínuo

Para mostrar a derivação do método DG utilizaremos as equações SW como exemplo, a derivação para as leis de conservação é similar, veja [3, 5]. Considere o sistema *Shallow Water*:

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x + (hv)_y = 0, \\ (hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x + (huv)_y = -ghb_x, \\ (hv)_t + (huv)_x + (hv^2 + \frac{1}{2}gh^2)_y = -ghb_y. \end{cases} \quad (1)$$

Podemos escrever a equação acima em uma forma mais compacta:

$$U_t + \nabla \cdot \mathbf{F}(U) = s(h, b) \quad (x, y) \in \Omega \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

onde $U = (h, hu, hv)^T$ e $\mathbf{F}(U) = (f(U), g(U))$, com condição inicial $U(x, y, 0) = U_0(x, y)$.

Seja T_τ a família de partições do domínio computacional Ω parametrizado por $\tau > 0$. Para qualquer triângulo $K \in T_\tau$, definimos $\tau_K = \text{diam}(K)$, $\tau = \max_{K \in T_\tau} \tau_K$ e $|K|$ a sua área. Para cada lado e_K^i ($i = 1, 2, 3$) do triângulo K , denotamos seu comprimento l_K^i e seu vetor normal unitário por \vec{n}_K^i . Buscamos uma solução aproximada de (2) que pertença ao espaço dimensional finito

$$V_\tau = V_\tau^k = \{w \in L^2(\Omega); w|_K \in P^k(K) \forall K \in T_\tau\}, \quad (3)$$

onde $P^k(K)$ denota o espaço de polinômios em K de grau no máximo k . Seguindo [5, 10], para a derivação de um esquema DG, a equação (2) é multiplicada por uma função teste $w(x, y) \in V_\tau$, integramos sobre K e em seguida aplicamos o teorema da Divergência obtendo assim:

$$\iint_K U_t w \, d\mathbf{x} - \iint_K \mathbf{F} \cdot \nabla w \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^3 \int_{e_K^i} \hat{\mathbf{F}}|_{e_K^i} \cdot \vec{n}_K^i w \, ds = \iint_K s(h, b) w \, d\mathbf{x}, \quad (4)$$

O fluxo numérico $\hat{\mathbf{F}}$ é definido ao longo das arestas do elemento K de forma que

$$\hat{\mathbf{F}}|_{e_K^i} \cdot \vec{n}_K^i = \mathcal{F} \left(U_i^{\text{int}(K)}, U_i^{\text{ext}(K)}, \vec{n}_K^i \right), \quad (5)$$

onde $U_i^{int(K)}$ e $U_i^{ext(K)}$ são as aproximações dos valores na aresta e_K^i obtidas no interior e exterior de K , para detalhes veja [3, 5].

A função \mathcal{F} pode ser definida usando o fluxo global Lax-Friedrichs

$$\mathcal{F}(a_1, a_2, \vec{n}) = \frac{1}{2} [F(a_1) \cdot \vec{n} + F(a_2) \cdot \vec{n} - \alpha(a_2 - a_1)],$$

onde $\alpha = \max |\mathbf{F}'(U) \cdot \vec{n}|$, note que o cálculo do α leva em conta os autovalores. Dessa forma para o modelo *shallow water equations* temos que $\alpha = \max ((|u| + \sqrt{gh}, |v| + \sqrt{gh}) \cdot \vec{n})$, o máximo é tomado sobre o domínio Ω .

Afim de obter um método bem balanceado, isto é que este mantenha o equilíbrio entre o fluxo e o termo fonte, preservando a solução estacionária, o esquema (4) é modificado e assume a forma:

$$\iint_K U_t w \, d\mathbf{x} - \iint_K \mathbf{F} \cdot \nabla w \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^3 \int_{e_K^i} \hat{\mathbf{F}}^* \cdot \vec{n}_K^i w \, ds = \iint_K s(h, b) w \, d\mathbf{x}, \quad (6)$$

onde

$$\hat{\mathbf{F}}^* \cdot \vec{n}_K^i = \mathcal{F} \left(U_i^{*,int(K)}, U_i^{*,ext(K)}, \vec{n}_K^i \right) + \langle \delta_{i,x}^*, \delta_{i,y}^* \rangle \cdot \vec{n}_K^i, \quad (7)$$

para detalhes veja [3, 10].

Podemos usar método de discretização no tempo Runge-Kutta de terceira ordem:

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= U^n + \Delta t \mathcal{L}(U^n), \\ U^{(2)} &= \frac{3}{4} U^n + \frac{1}{4} \left(U^{(1)} + \Delta t \mathcal{L}(U^{(1)}) \right), \\ U^{n+1} &= \frac{1}{3} U^n + \frac{2}{3} \left(U^{(2)} + \Delta t \mathcal{L}(U^{(2)}) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Onde $\mathcal{L}(U)$ é o operador espacial.

2.1 Limitador TVB

Neste trabalho é utilizado o limitador TVB clássico com função minmod corrigida definida em [5] para retirar as oscilações espúrias

$$\bar{m}(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} a_1, & \text{se } |a_1| \leq \Lambda \tau^2, \\ m(a_1, \dots, a_n), & \text{em caso contrário,} \end{cases} \quad (9)$$

onde Λ é o parâmetro TVB a ser escolhido adequadamente, este pode ser obtido em termos da segunda derivada da condição inicial perto dos seus pontos críticos, para detalhes veja [4]. Se Λ é escolhido pequeno demais, mais células do que o necessário serão identificadas contendo oscilações, aumentando o custo computacional; no entanto, se Λ é escolhido muito grande, oscilações espúrias surgirão. A função minmod m é dada por

$$m(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} s \min_i |a_i|, & \text{se } s = \text{sign}(a_1) = \dots = \text{sign}(a_n), \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases} \quad (10)$$

De maneira geral, este limitador é aplicado em U após cada passo interno da discretização de tempo Runge-Kutta. O procedimento do limitador TVB envolve duas etapas: a primeira é verificar se alguma limitação é necessária, em um determinado elemento; se um certo elemento necessitar do limitador, então o segundo passo é aplicar este sobre o respectivo vetor [3, 11]. Para detectar as células com problemas usando o limitador descrito acima, declaramos que se função descrita

em (9) retornar um valor diferente do primeiro argumento, esta célula é marcada como uma célula problemática e deve-se aplicar o limitador.

Se o limitador TVB não for utilizado corretamente este pode destruir a solução estacionária. Para evitar isso, como explicado em [10,11], para o modelo *shallow water equations* verifica-se então se este é necessário baseado em $(h + b, (hu), (hv))^T$ se $m_{i,j} \geq 0$ ou baseado em $(h, (hu), (hv))^T$ caso contrário.

2.2 Limitador *positive preserving*

Para que o princípio do máximo, veja [12], seja satisfeito nós precisamos modificar o polinômio $U_K(\mathbf{x})$ de forma que $U_K(\mathbf{x}) \in [A, B], \forall \mathbf{x} \in S_K$. Para todos os K , assumimos que $\bar{U}_K^n \in [A, B]$, como em [12] usamos o seguinte polinômio $\tilde{U}_K(\mathbf{x})$ em vez de $U_K(\mathbf{x})$:

$$\tilde{U}_K(\mathbf{x}) = \theta(U_K(\mathbf{x}) - \bar{U}_K^n) + \bar{U}_K^n, \tag{11}$$

$$\theta = \min \left\{ \left| \frac{B - \bar{U}_K^n}{M_K - \bar{U}_K^n} \right|, \left| \frac{A - \bar{U}_K^n}{m_K - \bar{U}_K^n} \right|, 1 \right\},$$

$$M_K = \max_{\mathbf{x} \in S_K} U_K(\mathbf{x}), \quad m_K = \min_{\mathbf{x} \in S_K} U_K(\mathbf{x}).$$

onde S_K é o conjunto dos pontos de quadratura e \bar{U}_K é o valor médio de U no elemento K . Para o modelo *Shallow Water Equations* o princípio do máximo se resume em $h_K(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in S_K$. Podemos então usar o limitador *positive preserving* [10] dado pela equação (11) com

$$\theta = \min \left\{ 1, \frac{\bar{h}_j^n}{\bar{h}_j^n - m_{i,j}} \right\}, \quad m_{i,j} = \min_{(x,y) \in S_K} h_{ij}^n(x, y). \tag{12}$$

2.3 Integração numérica

As integrais que aparecem na equação (6) podem ser calculadas numericamente usando regras de quadratura, neste trabalho como em [10] usamos uma regra de quadratura Gaussiana especial a fim de que a condição CFL e o princípio do máximo sejam satisfeitos, para detalhes veja [3, 12].

Esta regra de quadratura pode ser construída através do produto tensorial de N pontos da quadratura de Gauss-Lobatto e $k + 1$ pontos de quadratura de Gauss, para detalhes veja [12]. Em particular, nos testes numéricos realizados neste trabalho usamos polinômios lineares ($k = 1$), sendo necessários e suficientes 3 pontos de quadratura Gauss-Lobatto e 2 de Gauss. Dessa forma o conjunto S_K é formado por 12 pontos de quadratura, onde 6 destes pontos pertencem às arestas (\tilde{S}_K), 2 em cada aresta, e 6 estão no interior do triângulo (\bar{S}_K).

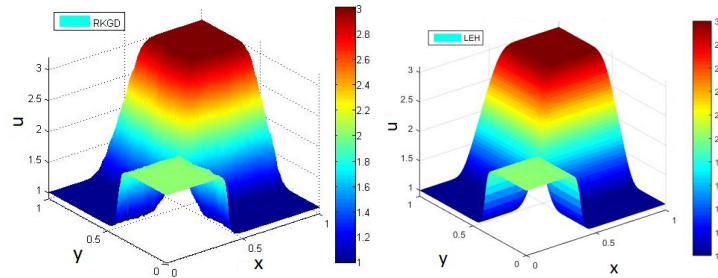
3 Resultados e experimentos numéricos

Nesta seção apresentaremos os resultados numéricos obtidos para as leis de conservação linear e de Burgers, e para o sistema de leis de balanço *Shallow Water*. A fim de verificar estes resultados, para o caso das leis de conservação estes foram comparadas qualitativamente com os obtidos pelo método Lagrangian-Eulerian (LEH), desenvolvido por Perez e Abreu [1, 2, 8]. Para o caso das equações SW, estes foram comparadas qualitativamente com os obtidos pelo Xing e Zhang em [10]. O valor do parâmetro Λ , necessário no limitador TVB, foi estimado baseado em testes numéricos realizados.

3.1 Leis de conservação

Problema 1 (Equação de Burgers sem viscosidade): com $(x, y, t) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 0.5]$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad u(x, y, 0) = \begin{cases} 2, & x < 0.25, y < 0.25 \\ 3, & x > 0.25, y > 0.25 \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (13)$$

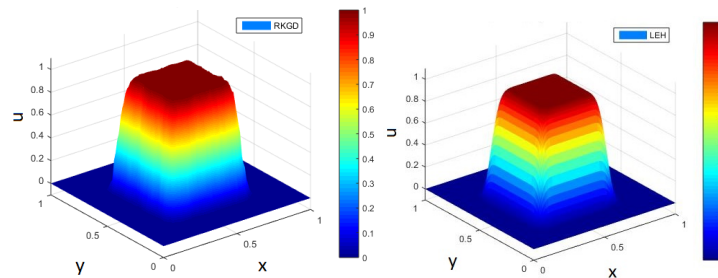


(a) $\Lambda = 0.5, \tau = 0.0143$ (23262 elementos). (b) $CFL = 0.35$, 16384 células.

Figura 1: Resultado obtido para o PVI (13) para $t = 1/12$.

Problema 2 (Equação de Advecção Linear): com $(x, y, t) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 0.5]$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(x, y, 0) = \begin{cases} 1, & 0.1 \leq x \leq 0.6 \text{ e } 0.1 \leq y \leq 0.6 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (14)$$



(a) $\Lambda = 0.5, \tau = 0.0143$ (23262 elementos) (b) $CFL = 0.35$, 16384 células.

Figura 2: Resultado obtido para o PVI (14) para $t = 0.1$.

3.2 Modelo *shallow water equations*

Problema 1 (Teste Propriedade *Well-Balanced*): Para verificar que o método implementado possui a propriedade *well-balanced* testamos se este é capaz de preservar o estado estacionário ($h + b = \text{cte}$ e $u = v = 0$). Este exemplo foi tomado de Xing [10]. Consideramos um domínio computacional retangular $[0, 1] \times [0, 1]$ e a seguinte função do fundo

$$b(x, y) = \max(0, 1 - (10x - 5)^2 - (10y - 5)^2), \quad (15)$$

e a condição inicial é uma solução estacionária:

$$h(x, y, 0) = 2 - b(x, y), \quad hu(x, y, 0) = hv(x, y, 0) = 0.$$

Uma condição de contorno periódica foi usada. Para que o método possua a propriedade *well-balanced* o estado estacionário deve ser preservado e a superfície deve permanecer plana ($h + b = \text{cte}$), de forma que o erro obtido seja da ordem do erro de arredondamento. Calculamos a solução até $t = 0.5$, em uma malha com $\tau = 0.0242$ (8072 elementos) e utilizamos $\Lambda = 0.5$. Na tabela 1 é mostrado os erros ε_{L_1} obtidos, onde podemos ver claramente que todos os erros estão no nível de erros de arredondamento, o que verifica a propriedade *well-balanced*.

Tabela 1: Erro ε_{L_1} para o problema estacionário.

h	hu	hv
1.723E-14	5.443E-14	5.595E-14

Problema 2 (Barragem Circular): Consideramos um domínio computacional quadrado $[-10, 10] \times [-10, 10]$ com topografia de fundo plana, ou seja, $b = 0$. A barragem está localizada em $r = x^2 + y^2 = 6$ e a altura da água h é inicialmente definida como 1.5 dentro da barragem e 0.5 fora. Ambas as componentes de velocidade u e v são definidas inicialmente como zero. No instante $t = 0$, a parede circular que forma a barragem entra em colapso.

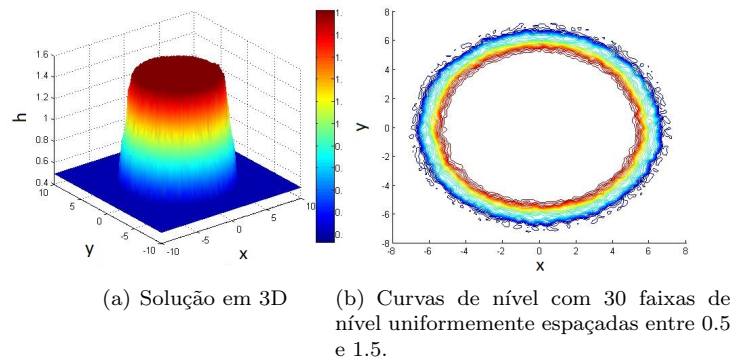


Figura 3: Resultado obtido para o problema da barragem circular para $t = 0.1$, $\tau = 0.2264$ (36354 elementos) e $\Lambda = 0.001$.

4 Conclusões

Dentre as dificuldades numéricas encontradas no trabalho temos que dependendo do diâmetro da malha muitas oscilações espúrias são geradas e o limitador TVB pode não ser capaz de retirar todas, de forma que estas se propaguem ao longo do tempo levando a uma solução incorreta. A escolha do parâmetro Λ não é trivial, então testes numéricos foram necessários para escolher de forma conveniente este parâmetro, pois este é de fundamental importância na retirada das oscilações espúrias. Informações sobre o valor de U^{ext} quando o elemento pertence ao contorno não foram encontradas na literatura, visto que geralmente quando estamos trabalhando com problemas estritamente hiperbólicos condições de contorno não são sempre necessárias. Se o valor de U_{ext} no contorno for atribuído de maneira diferente aos exemplos dos artigos referentes, isto pode acarretar um erro que se propaga para dentro do domínio. Dessa forma, em alguns casos não foi possível

reproduzir a solução numérica como nos artigos da bibliografia, em especial Xing [10], visto que a aplicação do método RKDG no contorno em [10] não é trivial e nem clara para alguns exemplos. Em termos gerais o método apresentou bom comportamento convergindo para as soluções entrópicas, mostrando assim ser capaz de capturar as ondas de rarefações e ondas de choque, assim como outros tipos de ondas. Porém o método necessita de malhas com um número elevado de elementos, gerando um grande custo computacional e a impossibilidade prática de reproduzir alguns resultados obtidos em [10] para o modelo *shallow water equations*.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES - Código de Financiamento 001. Agradecemos também ao Prof. John Perez, ITM/Colômbia, pela contribuição na realização deste trabalho.

Referências

- [1] Abreu, E., Matos, V., Pérez, J. and Rodríguez-Bermúdez, P. A Class of Lagrangian-Eulerian Shock-Capturing Schemes for First-Order Hyperbolic Problems with Forcing Terms. *J. Sci. Comput.* 86, 14, 2021.
- [2] Abreu, E., Perez, P. A fast, robust, and simple Lagrangian-Eulerian solver for balance laws and applications, *Computers & Mathematics with Applications*, 77(9): 2310-2336, 2019.
- [3] Araujo, I. L. N. Aplicação de esquemas de Galerkin Descontínuo em problemas hiperbólicos em 2D, Dissertação de Mestrado, UFF, 2020.
- [4] Cockburn, B., Shu, C.-W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: general framework, *Math. Comp.*, 52: 411-435, 1989.
- [5] Cockburn, B., Shu, C.-W. The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems, *Journal of Computational Physics*, 141:199-224, 1998.
- [6] LeVeque, R. J. *Numerical Methods for Conservation Laws*, second ed. Birkhauser, 1992.
- [7] LeVeque, R. J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2002.
- [8] Perez, J. A. Lagrangian-Eulerian approximation methods for balance laws and hyperbolic conservation laws, Tese de Doutorado, 2015.
- [9] Vreugdenhil, C. B. *Numerical Methods for Shallow Water Flow*. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [10] Xing, Y., Zhang, X. Positivity-preserving well-balanced discontinuous Galerkin methods for the shallow water equations on unstructured triangular meshes, *J. Sci. Comput.*, 57:19-41, 2013.
- [11] Xing, Y., Zhang, X., Shu, C.-W. Positivity-preserving high order well-balanced discontinuous galerkin methods for the shallow water equations, *Adv. Water Resources*, 33:1476-1493, 2010.
- [12] Zhang, X., Xia, Y., Shu, C.-W. Maximum-principle-satisfying and positivity-preserving high order discontinuous Galerkin schemes for conservation laws on triangular meshes, *Journal of Scientific Computing*, 50:29-62, 2012.