Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Geodésicas e Momento Angular Constante no espaço Anti-de Sitter (2,3)

Samuel A. Wainer [1]
Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP

Resumo. Considere M^{adSL} o Espaço de Anti-de Sitter Lorentziano de assinatura $(2,3)$. Neste trabalho demonstraremos o fato de que se o movimento de uma partícula restrita à M^{adSL}, sem ação de nenhuma força detetável por observadores em M^{adSL}, acontece sob momento angular constante, visto em $\mathbb{R}^{2,3}$, então essa trajetória acontece em uma geodésica tipo-tempo. Também demonstraremos que qualquer trajetória em um geodésica na estrutura M^{adSL} implica em movimento sob momento angular constante, visto em $\mathbb{R}^{2,3}$.

Palavras-chave. Anti-de Sitter, Momento Angular, Geodésicas, Relatividade Geral.

1 Introdução

Considere $\mathbb{R}^{p,q}$ como sendo o par $(\mathbb{R}^{p+q}, \mathring{\boldsymbol{g}})$, onde $\mathring{\boldsymbol{g}}$ é a métrica pseudo-Euclideana de assinatura (p,q). No que segue, denotaremos por $SO(p,q)$ o grupo pseudo-ortogonal em $\mathbb{R}^{p,q}$.

O espaço de Anti-de Sitter $M = SO(2,3)/S(1,3)$ de assinatura $(2,3)$ é uma brana, ou seja uma subvariedade, na estrutura $\mathbb{R}^{2,3}$. Definimos o espaço de Anti-de Sitter Lorentziano de assinatura $(2,3)$ como a estrutura $M^{adSL} = (M, \boldsymbol{g}, D, \tau_{\boldsymbol{g}}, \uparrow)$, onde se $i : M \to \mathbb{R}^5$ é a aplicação inclusão, então $\boldsymbol{g} = i^*\mathring{\boldsymbol{g}}$ é a métrica induzida, D é a conexão de Levi-Civita de M, $\tau_{\boldsymbol{g}}$ é uma orientação e $\uparrow$ é uma orientação no tempo em M (para mais detalhes, consulte [8, 9]).

Além disso, $(M, \boldsymbol{g})$ é uma pseudo-esfera na estrutura $\mathbb{R}^{2,3}$ e é um espaço-tempo com curvatura Riemanniana constante. O grupo $SO(2,3)$ age transitivamente em $SO(2,3)/SO(1,3)$, que é, portanto, um espaço homogêneo (para $SO(2,3)$).

O espaço de Anti-de Sitter e também o espaço de de Sitter vem sendo usados por muitos físicos [4, 5] como espaço alternativo para movimento de partículas e campos ao invés do espaço-tempo de Minkowski $\mathcal{M}$. Como é bem conhecido, o movimento natural de uma partícula livre de massa m em $\mathcal{M}$ acontece sob momento linear constante $\boldsymbol{p} = m\gamma_* = cte$, onde $\gamma : \mathbb{R} \to M$ é uma curva tipo-tempo. A questão que surge aqui é a seguinte:

Qual é o movimento natural de uma partícula livre na estrutura $(M, \boldsymbol{g})$?

Uma sugestão natural para o espaço de de Sitter [2] é que tal movimento acontece sob momento angular constante $\boldsymbol{L}$ determinado por observadores do espaço ambiente em que M está mergulhado. Guiados por tal ideia, apresentamos aqui o seguinte resultado:

a) Se uma partícula viaja em uma geodésica na estrutura M^{asSL}, então seu momento angular $\boldsymbol{L}$ em $\mathbb{R}^{2,3}$ é constante.

[1] wainer@ita.br.

b) Se uma partícula de massa m restrita a se mover em M com momento angular constante em $\mathbb{R}^{2,3}$, então seu movimento quando visto por um observador na brana M será descrito por uma geodésica tipo-tempo na estrutura M^{adSL}.

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira: na Seção 2 fixamos as notações necessárias, descrevemos o espaço Anti-de Sitter M como uma pseudo-esfera mergulhada em $\mathbb{R}^{2,3}$ e apresentamos a equação de movimento geodésico (de uma partícula livre de massa m) na estrutura M^{adSL}. Na Seção 3 apresentamos a equação de movimento que uma partícula de massa m restrita a se mover em M com momento angular constante em $\mathbb{R}^{2,3}$ e com isso enunciamos o resultado de que os conceitos de momento angular constante e movimento geodésico são equivalentes na estrutura M^{adSL}. Por fim, na Seção 4 apresentamos nossas conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

2 Geodésicas no Espaço Anti-de Sitter $(2,3)$

Primeiramente vamos apresentar a descrição do espaço Anti-de Sitter de assinatura $(2,3)$, M, como uma pseudo-esfera de raio l dentro da estrutura $\mathbb{R}^{2,3}$.

Seja $(X^{-1}, X^0, X^1, X^2, X^3)$ coordenadas cartesianas globais de $\mathbb{R}^{2,3}$. A equação representando a pseudo-esfera é

$$\left(X^{-1}\right)^2 + \left(X^0\right)^2 - \left(X^1\right)^2 - \left(X^2\right)^2 - \left(X^3\right)^2 = l^2.$$

Aplicando a projeção estereográfica em M podemos introduzir coordenadas conformes $\{x^\mu\}$ em M. Imediatamente temos que[2]:

$$\boldsymbol{g} = i^* \mathring{\boldsymbol{g}} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \Omega^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu,$$

onde

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}, \quad \sigma^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu,$$

$$\Omega = \frac{4l^2}{4l^2 + \sigma^2} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma^2}{4l^2}}, \quad \text{e}$$

$$X^\mu = \Omega x^\mu, \quad X^{-1} = l\Omega \left[\frac{\sigma^2}{4l^2} - 1\right] = l(1 - 2\Omega).$$

Agora, escrevendo $D_{\partial_\mu} \partial_\nu = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \partial_\alpha$, os coeficientes de conexão não nulos são:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{00} = -\frac{\Omega}{2l^2} x^0, \quad \Gamma^0_{01} = \frac{\Omega}{2l^2} x^1, \quad \Gamma^0_{02} = \frac{\Omega}{2l^2} x^2, \quad \Gamma^0_{03} = \frac{\Omega}{2l^2} x^3,\\
&\Gamma^0_{11} = -\frac{\Omega}{2l^2} x^0, \quad \Gamma^0_{22} = -\frac{\Omega}{2l^2} x^0, \quad \Gamma^0_{33} = -\frac{\Omega}{2l^2} x^0, \quad \Gamma^1_{00} = \frac{\Omega}{2l^2} x^1,\\
&\Gamma^1_{01} = -\frac{\Omega}{2l^2} x^0, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{\Omega}{2l^2} x^1, \quad \Gamma^1_{12} = \frac{\Omega}{2l^2} x^2, \quad \Gamma^1_{13} = \frac{\Omega}{2l^2} x^3,\\
&\Gamma^1_{22} = -\frac{\Omega}{2l^2} x^1, \quad \Gamma^1_{33} = -\frac{\Omega}{2l^2} x^1, \quad \Gamma^2_{00} = \frac{\Omega}{2l^2} x^2, \quad \Gamma^2_{02} = -\frac{\Omega}{2l^2} x^0,\\
&\Gamma^2_{11} = -\frac{\Omega}{2l^2} x^2, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{\Omega}{2l^2} x^1, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{\Omega}{2l^2} x^2, \quad \Gamma^2_{23} = \frac{\Omega}{2l^2} x^3,\\
&\Gamma^2_{33} = -\frac{\Omega}{2l^2} x^2, \quad \Gamma^3_{00} = \frac{\Omega}{2l^2} x^3, \quad \Gamma^3_{03} = -\frac{\Omega}{2l^2} x^0, \quad \Gamma^3_{11} = -\frac{\Omega}{2l^2} x^3,\\
&\Gamma^3_{13} = \frac{\Omega}{2l^2} x^1, \quad \Gamma^3_{22} = -\frac{\Omega}{2l^2} x^3, \quad \Gamma^3_{23} = \frac{\Omega}{2l^2} x^2, \quad \Gamma^3_{33} = \frac{\Omega}{2l^2} x^3.
\end{aligned} \tag{1}$$

[2]A matriz com entradas $\eta_{\mu\nu}$ é uma matriz diagonal $diag(1, -1, -1, -1)$.

Seja $\gamma : I \to M, s \mapsto \gamma(s)$ uma geodésica tipo-tempo em M. Nós sabemos que o campo vetorial tangente $\gamma_*(s) = \dfrac{d\boldsymbol{x}^\alpha \circ \gamma(s)}{ds} \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big|_\gamma$ satisfaz $D_{\gamma_*}\gamma_* = 0$, que escrito em coordenadas é

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0. \tag{2}$$

Usando os coeficientes de conexão dados pela Eq.(1) obtemos a equação da geodésica para o espaço de Anti-de Sitter de assinatura $(2,3)$:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} - \frac{\Omega}{l^2}x_\mu\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\alpha}{ds} + \frac{\Omega}{2l^2}x^\alpha\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} = 0. \tag{3}$$

3 Momento Angular Constante e Geodésicas

Seja

$$\left\{\boldsymbol{E}_A := \frac{\partial}{\partial X^A}\right\}, A = -1, 0, 1, 2, 3$$

a base canônica de $T\mathbb{R}^{2,3}$ e seja $\left\{E^A := dX^A\right\}$ uma base de $T^*\mathbb{R}^{2,3}$ dual a $\{\boldsymbol{E}_A\}$.

A métrica $\mathring{\boldsymbol{g}}$ em $\mathbb{R}^{2,3}$ é dada por

$$\mathring{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{\eta}_{AB}E^A \otimes E^B,$$

onde é a matriz com entradas $\boldsymbol{\eta}_{AB}$ é a matriz diagonal $diag(1, 1, -1, -1, -1)$.

Além disso seja

$$\mathring{g} = \eta^{AB} = \boldsymbol{E}_A \otimes \boldsymbol{E}_B$$

a métrica do fibrado cotangente (com $\eta^{AB}\boldsymbol{\eta}_{BC} = \delta^A_C$). Finalmente seja $\{E_A\}$ a base recíproca de $\left\{E^A\right\}$, i.e., $\mathring{g}(E^A, E_B) = \delta^A_B$. Introduzimos a base $\{\mathcal{E}_A\}$ de $\mathbb{R}^5$ e consideramos a identificação usual $E_A(p) \simeq E_A(p') \simeq \mathcal{E}_A,\ \forall p, p' \in \mathbb{R}^5$.

Sejam $\boldsymbol{X} = X^A\mathcal{E}_A$ o covetor posição, $\boldsymbol{P} = m\ddot{X}^B\mathcal{E}_B$ o covetor momento linear em $\mathbb{R}^{2,3}$ e $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{P}$ o momento angular de uma partícula de massa m em $\mathbb{R}^{2,3}$. Se a partícula está se movendo livremente [3] na subvariedade M, uma hipótese natural é que o momento angular em $\mathbb{R}^{2,3}$ desta partícula seja uma constante de movimento.

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{cte}$ implica imediatamente em

$$\frac{1}{2}(X^A\ddot{X}^B - \ddot{X}^AX^B)\mathcal{E}_A \wedge \mathcal{E}_B = 0. \tag{4}$$

Assim, para $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ teremos $X^\alpha\ddot{X}^\beta - \ddot{X}^\alpha X^\beta = 0$, i.e.,

$$x^\alpha\left(-\frac{\Omega}{l^2}x_\mu\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} + \frac{d^2x^\beta}{ds^2}\right) - \left(-\frac{\Omega}{l^2}x_\mu\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\alpha}{ds} + \frac{d^2x^\alpha}{ds^2}\right)x^\beta = 0. \tag{5}$$

Também, da equação $X^\alpha\ddot{X}^{-1} - \ddot{X}^\alpha X^{-1} = 0$, segue que

$$\begin{aligned} &-(2\Omega - 1)\left(\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \frac{1}{l^2}\Omega x_i\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^\alpha}{ds}\right) \\ &+\frac{1}{2l^2}\Omega\left(\frac{1}{l^2}\Omega x_ix_j\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} + \frac{dx_i}{ds}\frac{dx^i}{ds} + x_i\frac{d^2x^i}{ds^2}\right)x^\alpha = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

[3] Do ponto de vista físico, dizer que se move livremente quer dizer que observadores morando em M não podem detectar nenhuma força agindo na partícula.

Estas são as equações do movimento de acordo com a estrutura M^{adSL}. Fixadas tais notações e hipóteses, podemos demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 3.1.

a) Se uma partícula viaja em uma geodésica na estrutura M^{asSL}, então seu momento angular $\boldsymbol{L}$ em $\mathbb{R}^{2,3}$ é constante.

b) Se uma partícula de massa m restrita a se mover em M com momento angular constante em $\mathbb{R}^{2,3}$, então seu movimento quando visto por um observador na brana M será descrito por uma geodésica tipo-tempo na estrutura M^{adSL}.

Tal resultado segue da comparação entre as Eqs. (5), (6), com a Eq. (3).

4 Conclusões

O espaço de Anti-de Sitter e também o espaço de de Sitter vem sendo estudados como um espaço natural para o movimento de partículas e campos ao invés do espaço-tempo de Minkowski $\mathcal{M}$. Discutimos essas propriedades para o espaço de de Sitter em [7,8]. Recentemente [6], demonstramos que usando o formalismo do fibrado de Clifford [9], a hipótese que uma partícula movendo livremente no espaço de de Sitter com momento angular constante visto do espaço ambiente leva naturalmente à uma equação de Dirac [1] nesse espaço. Com as afirmações demonstradas na Proposição 3.1, sobre a equivalência entre geodésicas e momento angular constante visto do espaço ambiente, podemos esperar que o mesmo é válido para o Espaço Anti-de Sitter, isto é, utilizando o formalismo do fibrado de Clifford, podemos obter uma equação de Dirac, o que pretendemos demonstrar em trabalhos futuros.

Referências

[1] Dirac, P. A. M., The Electron Wave Equation in De-Sitter Space, *Ann. Math.* **36**, 657-669, 1935.

[2] Gürsey, F., Introduction to Group Theory, in DeWitt, C. and DeWitt, B. (eds.), *Relativity, Groups and Topology*, pp 91-161, Gordon and Breach, New York, 1964.

[3] Hawking, S. W. e Ellis, G. F. R., *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.

[4] Pereira, J. G. e Sampson, A. C., de Sitter Geodesics: Reappraising the Notion of Motion, *Gen Relativ Gravit*, **44**, 1299–1308, (2012).

[5] Pereira, J. G., Sampson, A. C. e Savi L. L., de Sitter Transitivity, Con-formal Transformations and Conservation Laws, *Int. J. Mod. Phys*, D **23**, 1450035 (2014).

[6] Rodrigues, W. A. Jr., Wainer, S. A., Rivera-Tapia, M., Notte-Cuello, E. A., Kondrashuk, I., A Clifford Bundle Approach to the Wave Equation of a Spin 1/2 Fermion in the de Sitter Manifold, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 253-277 (2016).

[7] Rodrigues, W. A. Jr. and Wainer, S. A., Notes on Conservation Laws, Equations of Motion and Particle Field in Lorentzian and Teleparallel de Sitter Spacetime Structures, *Adv. Math. Phys.* **2016**, 5465263 (2016)

DOI: 10.5540/03.2021.008.01.0419

[8] Rodrigues, W. A. Jr., Wainer, S.A. On the Motion of a Free Particle in the de Sitter Manifold. *Adv. Appl. Clifford Algebras* **27**, 1761–1767 (2017).

[9] Rodrigues, W. A. Jr. and Capelas de Oliveira, E., *The Many Faces of Maxwell, Dirac and Einstein Equation,. A Clifford Bundle Approach* (second edition, revised and enlarged), Lecture Notes in Physics **922**, Springer, Heidelberg, 2016.

DOI: 10.5540/03.2021.008.01.0419