

# Relação entre Instabilidade Hidrodinâmica e velocidade de queda por Simulação Numérica Direta

Celso Menoti da Silva<sup>1</sup>

UFRGS, Porto Alegre, RS

Edith Beatriz Camaño Schettini<sup>2</sup>

UFRGS, Porto Alegre, RS

**Resumo.** Em estuários é comum o surgimento de correntes de turbidez que podem ser classificadas como hipopícnais, no qual a densidade da água do rio carregada de sedimentos é menor que a água do mar. Nesse contexto surgem fenômenos de instabilidade hidrodinâmica na interface entre as correntes. O presente trabalho investigou a relação entre a topologia da instabilidade hidrodinâmica na interface das concentrações com a velocidade de queda da partícula de sedimentos, por Simulação Numérica Direta. Por essa metodologia, foi possível estabelecer que a velocidade de queda interfere nos Fluxos Turbulentos de tal forma que possibilita condições para o surgimento de instabilidades com topologia semelhante à da Instabilidade de Rayleigh-Taylor.

**Palavras-chave.** Simulação Numérica, Instabilidade Hidrodinâmica, Velocidade de Queda, Transporte de Sedimentos

## 1 Introdução

Os rios são responsáveis por despejar milhões de toneladas de sedimentos diariamente nos oceanos. A água doce, que entra no oceano, carregada de partículas, é tipicamente menos densa que a água salgada circundante. Assim, à medida que os rios entram nos oceanos, uma série de fenômenos são responsáveis pelo transporte de sedimentos. O deslocamento e a dispersão de manchas de poluentes ou nuvens de partículas são relevantes em estudos de impacto ambiental. Tais fenômenos de transporte podem ser ocasionados pela turbulência e/ou por diferença de densidade ou temperatura entre o fluido ambiente e a corrente transportada, conhecidos como correntes de densidade. Segundo Lowe [7] (1982), uma corrente de densidade em um líquido ou gás se mantém em movimento devido a ação da força de gravidade, que atua sobre a diferença de densidade. Nesse contexto, o efeito do empuxo pode gerar instabilidades hidrodinâmicas que poderão interferir no transporte e sedimentação. Uma instabilidade característica dessa configuração é a instabilidade de Rayleigh-Taylor, que depende da diferença de densidade entre os campos. Os trabalhos de Burns e Meiburg apresentaram resultados relevantes sobre a instabilidade em corrente de densidade. Dentre os resultados, destacam-se a Análise Instabilidade Linear [1] e a Simulação Numérica Direta da corrente de densidade [2]. Outra configuração de grande relevância é a Camada de Mistura, caracterizada pelo perfil médio de velocidade horizontal com um ponto de inflexão. Dessa conformação surge necessariamente a instabilidade hidrodinâmica de Kelvin-Helmholtz.

A presente investigação simulou uma Camada de Mistura Duplamente Estratificada com duas grandezas escalares, concentração de sedimentos e concentração salina, configuração semelhante

---

<sup>1</sup>celso.menoti@ufrgs.br

<sup>2</sup>bcamano@iph.ufrgs.br

ao de uma corrente hipopical, com o objetivo de verificar a influência da velocidade de queda na formação de instabilidades e investigar as causas dessa relação. Os diâmetros de partículas considerados no campo de sedimentos correspondem às velocidades de queda adimensionais de  $u_s = 0$  até  $u_s = 0,05$  [9]. Foram analisadas as formas topológicas da instabilidade na interface dos campos e relacionado ao comportamento dos Fluxos Turbulentos com a finalidade de caracterizar as formas topológicas das instabilidade de Kelvin-Helmholtz e Rayleigh-Taylor, segundo a influencia da velocidade de queda da partícula de sedimentos.

## 2 Metodologia

O presente trabalho considerou uma camada de mistura com dois perfis escalares, em que a concentração de sedimentos é instável e a concentração salina é estável. A massa específica do fluido,  $\rho$ , é uma função das concentrações escalares,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , de sedimentos e de salinidade, respectivamente, e é expressa por:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2), \quad (1)$$

em que  $\rho_0$  é a massa específica da água clara,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são os coeficientes de expansão volumétrica da concentração de sedimentos e da salinidade, respectivamente. A variação de massa específica total foi considerada significativa apenas no termo de empuxo na Equação de Navier-Stokes, conforme a Hipótese de Boussinesq [1].

As grandezas características usadas na adimensionalização foram:  $L = \delta_u$ ,  $U = \Delta u/2$ ,  $\varphi_{1,max}$  e  $\varphi_{2,max}$ . Como consequência, surgem os números adimensionais de Reynolds,  $Re$ , de Richardson,  $Ri$ , e de Schmidt,  $Sc$ , que estão definidos na Tabela 1. As equações adimensionalizadas ficam:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} + Ri_2 \left( \frac{1}{R_\rho} \varphi_1 + \varphi_2 \right) \delta_{i2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + (u_i + u_s \delta_{i2}) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} = \frac{1}{Re Sc_1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_i \partial x_i}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + u_i \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} = \frac{1}{Re Sc Sc_2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_i \partial x_i}. \quad (5)$$

Tabela 1: Grupos adimensionais e definições segundo a adimensionalização proposta. As constantes  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  correspondem à difusividade da concentração de partículas e salina, respectivamente.

Adimensional	Definição
Número de Reynolds	$Re = \delta_u U / \nu$
Número de Richardson	$Ri_k = \alpha_k \varphi_{k,max} g \delta_u / U^2$
Número de Schmidt	$Sc_k = \nu / \kappa_k$
Razão de Densidade	$R_\rho = \alpha \varphi_{2,max} / \beta \varphi_{1,max}$

O índice  $k$  indica a grandeza escalar:  $k = 1$  corresponde à concentração de partículas e  $k = 2$  à concentração salina. Nos experimentos numéricos adotou-se  $Re = 1000$ ,  $Ri_2 = 0,4$ ,  $R_\rho = 1$  e  $Sc_1 = Sc_2 = 1$ . A Razão de Densidade ( $R_\rho$ ) também corresponde à razão dos Números de Richardson salino e da concentração de partículas.

Para simular a camada de mistura temporal foram adotadas as seguintes condições de contorno:

- Condição Periódica para todas as variáveis na direção do eixo  $0x_1$ : se  $F$  é uma variável do problema, então  $F(x_1 = 0, x_2, x_3, t) = F(x_1 = L_{x_1}, x_2, x_3, t)$ ;
- Condição de deslizamento livre: para  $x_2 = \pm L_{x_2}/2$ , tem-se  $\partial u_1/\partial x_2 = 0$  e  $u_2 = 0$ .
- Para a condição de contorno no limite superior,  $x_2 = L_x/2$  pressupõe-se que o fluxo de massa é nulo. Com efeito, a integração da Equação (4), em regime permanente, resulta em:

$$u_s \varphi_1 + \frac{1}{ScRe} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = 0, \quad (6)$$

conhecida também como condição de Robin [1]. Considerou-se ainda que não há fluxo através da fronteira superior:  $\partial \varphi_2/\partial x_2 = 0$ .

Os Perfis do Fluxo Base, cujo esquema é apresentado na Figura 1, correspondem à condição inicial da simulação em que  $h = u_s t = 0$ :

- Velocidade:  $u_1(x_1, x_2, x_3, 0) = \bar{u}_1(x_2)$  e  $u_2(x_1, x_2, x_3, 0) = u_3(x_1, x_2, x_3, 0) = 0$ .
- Concentrações:  $\varphi_1(x_1, x_2, x_3, 0) = \bar{\varphi}_1(x_2)$  e  $\varphi_2(x_1, x_2, x_3, 0) = \bar{\varphi}_2(x_2)$ .

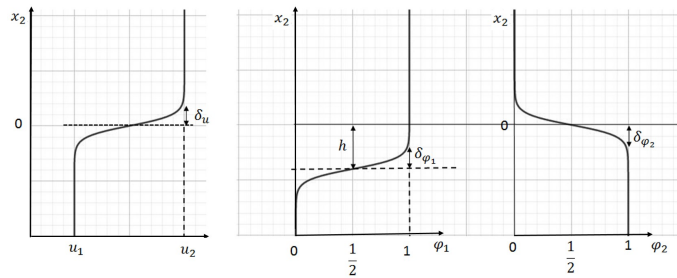


Figura 1: Perfis de base: o gráfico da esquerda corresponde ao perfil de velocidade média; os gráficos da direita apresentam os perfis escalares: concentração de sedimentos ( $\varphi_1$ ) e a concentração de sedimentos ( $\varphi_2$ ).

As Equações dos Perfis de Base adotadas são:

$$\bar{u}_1(x_2) = U \tanh\left(\frac{2x_2}{\delta_u}\right), \quad (7)$$

$$\bar{\varphi}_1(x_2) = \frac{\varphi_{1,max}}{2} \left[ 1 + \tanh\left(\frac{2x_2}{\delta_{\varphi_1}}\right) \right], \quad (8)$$

$$\bar{\varphi}_2(x_2) = \frac{\varphi_{2,max}}{2} \left[ 1 - \tanh\left(\frac{2x_2}{\delta_{\varphi_2}}\right) \right], \quad (9)$$

sendo,  $U = (u_2 + u_1)/2$ ,  $\delta_u$ ,  $\delta_{\varphi_1}$  e  $\delta_{\varphi_2}$  correspondem à metade das espessuras dos perfis da camada de mistura da velocidade, concentração de sedimentos e concentração salina. Com o objetivo de favorecer a instabilidade na interface do escoamento, no instante inicial é adicionado ao perfil de velocidade de base um ruído branco com amplitude  $A_f$ , descrito por funções trigonométricas que satisfazem a Equação da Continuidade (3) [8] [9]. Segundo o estudo de análise de estabilidade para camada de mistura, o modo de instabilidade predominante é o modo de Kelvin-Helmholtz [3]. O dimensionamento do domínio de cálculo deve ser uma função do comprimento de onda do modo

mais amplificado,  $\lambda$ , na direção principal do escoamento [8] [9]. O domínio de cálculo adotado foi:  $0 \leq x_1 \leq L_{x_1}$  e  $-L_{x_1}/2 \leq x_2 \leq L_{x_1}/2$  sendo que  $L_{x_1} = 7$ . Para as simulações a malha adotada foi  $n_{x_1} = 256$ ,  $n_{x_2} = 521$  e  $\Delta t = 0,001$ .

A metodologia numérica adotada foi a Simulação Numérica Direta (DNS, Direct Numerical Simulation). O código utilizado é o Incompact3d, [4], que permite a resolução numérica das equações de Navier-Stokes, Continuidade e Advecção-Difusão, para escoamentos incompressíveis, utilizando esquemas compactos de sexta ordem para a discretização espacial. A integração no tempo é feita pelo método de Adams-Bashforth de terceira ordem. As equações do movimento são resolvidas em uma malha cartesiana, uniforme em cada direção. Maiores detalhes podem ser encontrados em Laizet et al (2011) [5].

Com o crescimento da amplitude das perturbações, os termos não lineares passam a influenciar na instabilidade com a formação de vórtices característicos à forma topológica. O comportamento dos campos escalares médios, ao longo do tempo, pode ser representado pelas equações:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial t} - u_s \frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial x_2} = \frac{1}{ReSc_1} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} (\overline{u'_1 \varphi'_1}) - \frac{\partial}{\partial x_2} (\overline{u'_2 \varphi'_1}) \quad (10)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_2}{\partial t} = \frac{1}{ReSc_2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} (\overline{u'_1 \varphi'_2}) - \frac{\partial}{\partial x_2} (\overline{u'_2 \varphi'_2}). \quad (11)$$

Inicialmente os termos não lineares são de baixa ordem reduzindo essas equações ao problema de Difusão Unidimensional. Esse período inicial pode ser denominado de período linear e sua descrição é apresentada por Silva [9].

A quantificação da não linearidade pode ser estimada pelos Fluxos Turbulentos. Definiu-se como Fluxo Turbulento do escalar  $k$  na direção  $j$ , à expressão:

$$F_{kj} = \int_{\Omega} \varphi'_k (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{e}_j) dS. \quad (12)$$

Os Fluxos turbulentos são medidas que permite estimar a Difusividade Turbulenta de um escalar  $k$ ,  $\kappa_{tk}$ . Segundo Smyth e Kimura (2010) [10],  $\kappa_{tk}$  é calculada no domínio por:

$$\kappa_{tk} = - \frac{\int_{-L_{x_2}/2}^{L_{x_2}/2} F_k(x_2, t) dx_2}{\int_{\Omega} \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial x_2} d\Omega}. \quad (13)$$

A razão dos Coeficientes de Difusividade Turbulenta ( $\tau_t = \kappa_{t1}/\kappa_{t2}$ ) foi utilizada para comparar a diferença dessa grandeza nos campos escalares.

### 3 Resultados

Os casos simulados diferenciaram-se apenas pela velocidade de queda,  $u_s$ . Os valores considerados foram:  $u_s = 0, 0,001$  e  $0,01, 0,025$  e  $0,050$ . As situações em que  $u_s \leq 0,01$  apresentaram comportamento idêntico ao caso sem velocidade de queda,  $u_s = 0$ , com predomínio absoluto da instabilidade de Kelvin-Helmholtz que é formada na interface entre os campos escalares. Nos casos em que  $u_s \geq 0,025$ , o desenvolvimento da instabilidade indica que a topologia da instabilidade de Kelvin-Helmholtz começa a ser modificada no campo de sedimentos, com surgimento de outra topologia (Figura 2).

Para o caso no qual  $u_s = 0$ , os perfis médios escalares (Figura 3) mantiveram o padrão simétrico ímpar, mesmo com o crescimento da não linearidade. Para o instante  $t = 34,8$ , por exemplo, o perfil apresenta a mesma forma do perfil inicial médio e será solução das Equações (10) e (11). Com o crescimento das parcelas não lineares no tempo, ocorre a deformação do perfil médio inicial

mantendo a simetria. Dessa forma, os fluxos turbulentos verticais são iguais e a difusividade turbulenta nos campos escalares é a mesma.

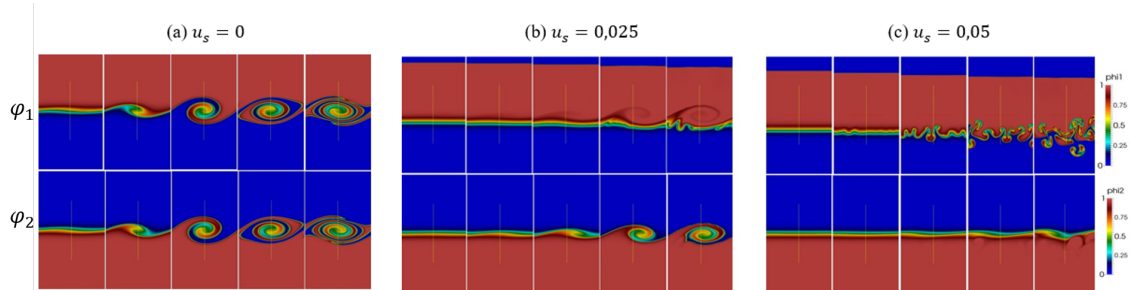


Figura 2: Sequência de desenvolvimento temporal para os instantes 34.8, 40.2, 45.6, 51, e 56.4 da camada de mistura para  $R_p = 1$  nos casos: (a)  $u_s = 0$ ; (b)  $u_s = 0,025$ ; (c)  $u_s = 0,050$ .

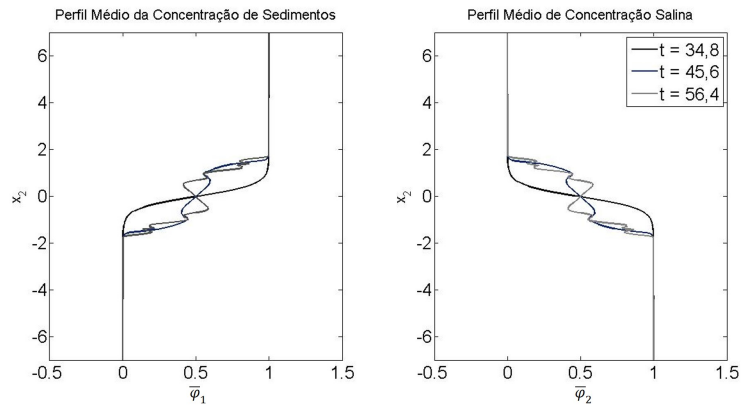


Figura 3: Evolução dos perfis escalares médios para o caso em que  $R_p = 1$ , sem sedimentação  $u_s = 0$ .

Os casos em que a velocidade de queda  $u_s \geq 0,025$ , os perfis escalares médios não apresentam simetria em relação ao eixo vertical,  $\vec{0}x_2$ , ao longo do tempo (Figura 4). Tal comportamento justifica-se pela Equação (10), visto que a advecção vertical depende da velocidade de sedimentação. Como consequência, o fluxo vertical turbulento do campo de sedimentação, aumenta a difusividade turbulenta desse campo. Na simulação em que  $u_s = 0,050$ , a sequência de campos de concentração de sedimentos (Figura 2) indica o surgimento de uma forma topológica similar à Instabilidade de Rayleigh-Taylor. Pela evolução apresentada pelos casos em que  $u_s = 0,025$  e  $u_s = 0,050$ , atribui-se essa forma topológica à velocidade de queda.

Quando  $0 \leq u_s \leq 0,01$ , a topologia instável característica é a de Kelvin-Helmholtz, pois o perfil médio de velocidade horizontal mantém um ponto de inflexão, condição necessária para a formação dessa instabilidade [6]. Portanto, espera-se que o fluxo turbulento horizontal seja predominante. Para avaliar a relação entre os Fluxos Turbulentos, foi proposta a Razão de Fluxos Turbulentos Médios do campo de sedimentos, em termos absolutos ( $\zeta = F_{1x_1}/F_{1x_2}$ ), em que  $F_{1x_p}$  corresponde à média espacial do fluxo turbulento na direção  $p \in 1,2$ , na qual 1 e 2 correspondem às direções horizontal e vertical, respectivamente, e os Fluxos Turbulentos são calculados pela Equação (12).

Conforme o previsto, para os casos em que há um predomínio da Instabilidade de Kelvin-Helmholtz o Fluxo turbulento horizontal é predominante e a Razão de Difusividade Turbulenta é

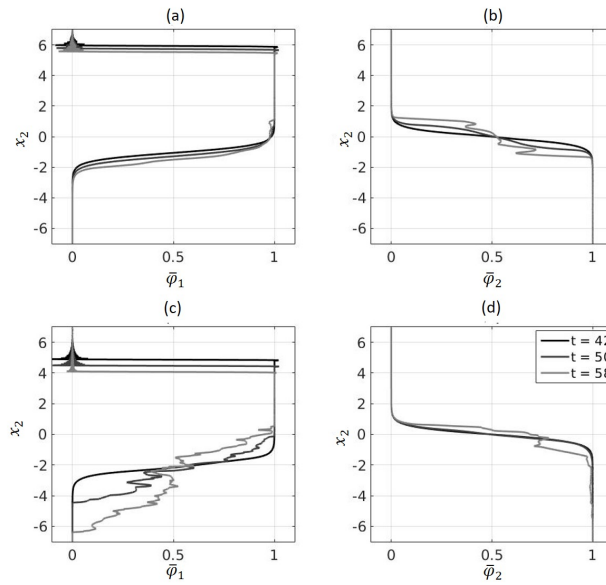


Figura 4: Perfis médio espaciais escalares para os casos em que  $R_\rho = 1,0$  com velocidade de queda de  $u_s = 0,025$ , gráficos (a) e (b), e  $u_s = 0,05$ , gráficos (c) e (d), para os campos de sedimentos ( $\bar{\varphi}_1$ ) e salinidade ( $\bar{\varphi}_2$ ), respectivamente.

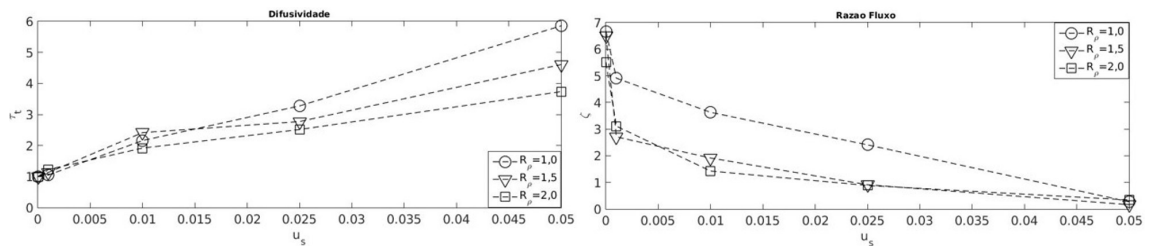


Figura 5: Relações entre Difusividade Turbulenta Média,  $\tau_t$ , e a Razão de Fluxo Médio,  $\zeta$ , com a velocidade de queda ( $u_s = 0, 10^{-3}, 10^{-2}, 2,5 \times 10^{-2}$  e  $5 \times 10^{-2}$ ).

próxima da unidade (Figura5). Já nos casos em que  $u_s = 0,025$  e  $0,050$ , o fluxo turbulento vertical torna-se predominante e a Difusividade Turbulenta do campo de sedimentos cresce, principalmente quando  $u_s = 0,05$ , caso em que surge uma topológica similar à Instabilidade de Rayleigh-Taylor na interface.

## 4 Conclusões

O presente trabalho investigou a relação entre a velocidade de queda e a forma topológica da instabilidade por Simulação Numérica Direta. Os casos simulados variaram a velocidade de queda sem variação de densidade, ou seja  $R_\rho = 1$ . Os campos escalares gerados indicaram que para velocidade de queda menores  $u_s = 0,01$ , há um predomínio da instabilidade de Kelvin-Helmholtz na interface dos campos. Verificou-se que nesses casos a difusividade turbulenta é próxima da unidade e predomina o Fluxo Turbulento Horizontal. Para o caso em que a velocidade de queda

é  $u_s = 0,050$ , a forma topológica verificada na interface é semelhante à Instabilidade de Rayleigh-Taylor. Verificou-se, também, um crescimento dos Fluxos Turbulentos Verticais e da difusividade turbulenta no campo de sedimentos. Portanto, a velocidade de queda da partícula interfere na dinâmica da formação de instabilidades hidrodinâmicas e modifica a forma típica da instabilidade da camada de mistura.

## Referências

- [1] Burns, P., Meiburg, E. , Sediment-laden fresh water above salt water: linear stability analysis *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 691, pages 279-314, 2012. DOI: 10.1017/jfm.2011.474
- [2] Burns, P., Meiburg, E. , Sediment-laden fresh water above salt water: non-linear simulations *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 762, pages 156-195, 2015. DOI: 10.1017/jfm.2014.645
- [3] Farenzena, B. A., Silvestrini, J. H., Linear stability analysis of particle-laden hypopycnal plumes *Physics of Fluids*, Volume 29, pages 124108-1 - 124108-9, 2017. DOI: 10.1063/1.4999343
- [4] INCOMPACT3D. Incompact3d, 2020. Página Inicial. Disponível em <www.incompact3d.com>. Acesso em 12 de março de 2020.
- [5] Laizet, S., Li, N., A powerful tool to tackle turbulence problems with up to  $O(10^5)$  computational cores *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Volume 67, pages 1735 - 1757, 2011. DOI: 10.1002/fld.2480
- [6] Lesieur, M., *Turbulence in Fluids*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2008.
- [7] Lowe, D. R. Sediment gravity flows; II, Depositional models with special reference to the deposits of high-density turbidity currents, *Journal of Sedimentary Petrology*, Volume 52, pages 279-297, 1982. DOI: 10.1306/212F7F31-2B24-11D7-8648000102C1865D
- [8] Martinez, D. M. V. Transição à Turbulência na Camada de Mistura Estavelmente Estratificada utilizando Simulação Numérica Direta e de Grandes Escalas, Tese de Doutorado, UFRGS, 2006.
- [9] Silva, C. M., Simulação numérica de instabilidades hidrodinâmicas em camada de mistura duplamente estratificada com efeito de velocidade de queda, Tese de Doutorado, UFRGS, 2019.
- [10] Smyth, W. D., Li, Kimura, S., Mixing in a Moderately Sheared Salt-Fingering Layer *J. of Physical Oceanography*, Volume 41, pages 1364 - 1384, 2010. DOI: 10.1175/2010JPO4611.1