Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Combinando o método de Pontos Interiores com o método Simplex para a solução de problemas de programação linear

Cecilia Orellana Castro[1]
Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará
Manolo Rodriguez Heredia [2]
Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará
Aurelio R. L. Oliveira [3]
Universidade Estadual de Campinas

Resumo. Quando a matriz A de restrições de um problema de programação linear apresenta posto completo, no método Simplex é usada uma submatriz não singular de A para determinar uma solução básica. Neste contexto, no método de Pontos Interiores, quando são usados métodos iterativos precondicionados, também usa-se uma submatriz não singular de A para calcular o precondicionador Separador. O processo que calcula uma solução básica factível para o método Simplex, a partir de um ponto do método de Pontos Interiores é chamado *crossover*. Neste trabalho combinam-se ambos os métodos para a solução de problemas de programação linear canalizados, mais precisamente usa-se uma base do precondicionador Separador para determinar se a solução básica associada a ela é factível primal, dual ou infactível no sentido do método Simplex. Resultados numéricos mostram que alguns problemas que não eram resolvidos usando apenas o método de Pontos Interiores, são resolvidos usando a estratégia do *crossover*. Também observam-se problemas que reduzem consideravelmente o número de iterações do método Simplex quando inicialmente usam o método de Pontos Interiores, isto é, combinam ambos os métodos.

Palavras-chave. Método de Pontos Interiores, Método Simplex, crossover

1 Introdução

O método Simplex e método de Pontos Interiores (MPI) são reconhecidos como ferramentas eficientes para problemas de programação linear. Uma melhor compreensão do condicionamento das matrizes que surgem no MPI incentivou os pesquisadores a examinar precondicionadores especiais, foi assim como surgiu o precondicionador Separador, [6].

Paralelamente pesquisadores melhoraram o método Simplex, de fato, ambos métodos são eficientes na prática, o método Simplex é mais adequado para problemas densos.

[1]ceciliaoc@unifesspa.edu.br.
[2]manolorh@unifesspa.edu.br.
[3]aurelio@ime.unicamp.br.

Mesmo que este método faça muitas iterações para convergir, elas são baratas. No entanto, o MPI faz poucas iterações, que geralmente são computacionalmente caras.

No método Simplex existe um conceito muito importante: *solução básica*, que está associada a uma matriz quadrada não singular chamada *base*. Neste método, a partir de uma solução básica factível inicial constrói-se uma sequência finita de soluções básicas factíveis de tal maneira que o valor da função objetivo forma uma sequência monótona. No método de Pontos Interiores, quando se trabalha com o precondicionador Separador, também existe o conceito de *matriz básica ou base*. Embora ambas sejam matrizes não singulares, os conceitos são totalmente diferentes e são explicados na Seção 2.

Neste trabalho, usa-se o conceito de *base* de ambos os métodos para combiná-los na solução de problemas de programação linear canalizado:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{P}) : \min c^T x, \text{ s. a.}\{Ax = b, x + s = u, x, s \geq 0\} \\ &(\mathrm{D}) : \max b^T y - u^T w, \text{ s. a.}\{A^T y - w + z = c, w, z \geq 0, y \in \mathbb{R}^m\} \end{aligned} \tag{1}$$

onde $x, s, w, z \in \mathbb{R}^n$ e a matriz $A : m \times n$ que será considerada de posto completo. Mais precisamente, quando os sistemas lineares oriundos do MPI começam a ficar muito mal condicionados apresentando uma convergência lenta, a base do precondicionador Separador no MPI é usada para obter uma base inicial do método Simplex, e desta maneira, atingir a convergência usando este método.

2 Base no método Simplex e Base do precondicionador Separador no MPI primal-dual

2.1 Base no método Simplex

Dado que $A_{m\times n}$ em (1) é de posto completo, existe uma submatriz não singular $(A_B)_{m\times m}$ de A, onde B é um conjunto de índices que correspondem às m colunas linearmente independentes chamados *índices básicos*. Chama-se de *índices não básicos* associados a um dado vetor $x \in \mathbb{R}^n$ os conjuntos $N_1 = \{i : x_i = 0\}$ e $N_2 = \{i : x_i = u_i\}$. Além disso, a matriz A_B é chamada de *base*, no método Simplex. Após uma reordenação das colunas de A, podemos considerar que $A = [A_B, A_{N_1}, A_{N_2}]$, além disso, se $x = (x_B, x_{N1}, x_{N2}) \in \mathbb{R}^n$, sendo $x_{N1} = 0_{N1}$ e $x_{N2} = u_{N2}$ tem-se que: $Ax = b$ se, e somente se, $x_B = A_B^{-1}(b - A_{N_1}0_{N1} - A_{N_2}u_{N2})$.

Definição 2.1. *[Solução básica de um problema primal canalizado no método Simplex] Dada uma base A_B, um vetor $x = (x_B, x_{N1}, x_{N2})$ sendo $x_{N1} = 0_{N1}$, $x_{N2} = u_{N2}$ e $x_B = A_B^{-1}(b - A_{N_1}0_{N1} - A_{N_2}u_{N2})$ é chamado solução básica. Se $u_B \geq x_B \geq 0$ então o vetor $x = (x_B, x_{N1}, x_{N2})$ é chamado solução básica factível.*

Se $y = A_B^{-T}c_B$, $\bar{c} = c - A^T y$ é o vetor de custos reduzidos. Os vetores de custos reduzidos não básicos são: $\bar{c}_{N_1} = c_{N_1} - A_{N_1}^T y$ e $\bar{c}_{N_2} = c_{N_2} - A_{N_2}^T y$.

Teorema 2.1. *Se $\bar{c}_{N_1} \geq 0$ e $\bar{c}_{N_2} \leq 0$ então uma solução básica factível, no sentido da definição 2.1, é solução ótima de (P).*

Podemos resumir o papel de uma *base* no método Simplex considerando as condições:

$$\mathbf{C1}: u_B \geq x_B \geq 0; \qquad \mathbf{C2}: \bar{c}_{N_1} \geq 0 \ \ e \ \ \bar{c}_{N_2} \leq 0, \quad \text{então:} \tag{2}$$

Caso 0 Se **C1** e **C2** são satisfeitas, então (x, s) é solução ótima de (P) e (y, z, w) é solução ótima de (D). Nesse caso, A_B é *base ótima* tanto para o problema (P) como (D). **Caso 1** Se **C1** é satisfeita e **C2** não é satisfeita, então (x, s) é solução básica primal factível, nesse caso, pode-se usar o método primal Simplex para atingir a otimalidade, partindo-se de (x, s). **Caso 2** Se **C2** é satisfeita e **C1** não é satisfeita, então $(y, z, w)^T$ é solução dual factível, nesse caso, pode-se usar o método dual Simplex para atingir a otimalidade, partindo-se de $(y, z, w)^T$. **Caso 3** Se **C1** e **C2** não são satisfeitas então $(x, s)^T$ não é solução factível primal e nem $(y, z, w)^T$ é solução factível dual.

2.2 Base do precondicionador Separador no método de Pontos Interiores

De acordo com as condições KKT, em cada solução ótima $(x^*, s^*, y^*, w^*, z^*)$ de (1), se satisfaz que: $x_i^* z_i^* = 0$ e $s_i^* w_i^* = 0$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Diz-se que uma solução é estritamente complementar se $x^* + z^* > 0$ e $s^* + w^* > 0$. O teorema de Complementaridade Estrita afirma que todo problema de programação linear com solução ótima, possui pelo menos uma solução ótima estritamente complementar, veja [7].

Para cada solução de (1) são definidos os conjuntos: $\mathcal{B}(x^*, s^*) = \{i : x_i^* > 0, \ s_i^* > 0\}$ e $\mathcal{N}(z^*, w^*) = \{i : z_i^* > 0, \ w_i^* > 0\}$, e com eles, definem-se: $\mathcal{B} = \bigcup_{x^*, s^*} \mathcal{B}(x^*, s^*)$ *e* $\mathcal{N} = \bigcup_{z^*, w^*} \mathcal{N}(z^*, w^*)$. De acordo com o Teorema de Goldman-Tucker, veja [7], os conjuntos $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ são uma partição de $\{1, 2, \ldots, n\}$, isto é: $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Em [7] é mostrado que se o problema têm infinitas soluções, a *Curva Central* converge ao centro analítico da face ótima e que este ponto de convergência é de fato uma solução estritamente complementar. Também prova-se que para cada solução estritamente complementar $(x^*, s^*, y^*, w^*, z^*)$, se satisfaz que $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x^*, s^*)$ e $\mathcal{N} = \mathcal{N}(z^*, w^*)$. Portanto se, $(x^*, s^*, y^*, w^*, z^*)$ é solução do MPI primal-dual, tem-se:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(x^*, s^*) \quad \text{e} \quad \mathcal{N} = \mathcal{N}(z^*, w^*). \tag{3}$$

Antes de chegar na solução ótima usando o MPI primal-dual, pode ser natural nos perguntar se existem subconjuntos de índices semelhantes ou relacionados com $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$. A resposta é afirmativa. Em [8], para cada iteração do MPI, define-se $\bar{\mathcal{B}}$ como um subconjunto de $\{1, 2, \ldots n\}$ com cardinalidade m tal que $A_{\bar{\mathcal{B}}}$ é não singular e $\bar{\mathcal{N}} = \{1, 2, \ldots n\} \backslash \bar{\mathcal{B}}$.

De acordo com a definição acima, é claro que existe mais de uma maneira de determinar $\bar{\mathcal{B}}$, podemos nos perguntar qual é a maneira mais conveniente de escolher este conjunto de índices. Para responder essa questão, a partir de agora (x, s, y, w, z) denota um ponto do MPI primal-dual e $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{y}, \hat{w}, \hat{z})$ uma solução básica do método Simplex. A cada ponto (x, s, y, w, z) de uma iteração do MPI primal-dual corresponde uma matriz $D = (X^{-1}Z + S^{-1}W)^{-1}$ que aparece no sistema de Equações Normais que é usado para determinar uma direção de busca. Suponha que:

$$x \to x^*, \quad s \to s^*, \quad y \to y^*, \quad z \to z^* \ \ \text{e} \ \ w \to w^*, \tag{4}$$

DOI: 10.5540/03.2021.008.01.0384

onde $(x^*, s^*, y^*, w^*, z^*)$ é o ponto de convergência da *Curva Central* quando $\mu \to 0$, veja [3].

Pela continuidade das componentes da matriz D, (3), (4) e o Teorema de Goldman-Tucker, para cada $i \in \mathcal{B}$ tem-se que $d_i \to \infty$ e, para cada $i \in \mathcal{N}$ tem-se que $d_i \to 0$. Isto motivou a construção do precondicionador Separador. Assim espera-se que $\bar{\mathcal{B}} \approx \mathcal{B}$.

Considerando as colunas de A correspondentes aos índices de $\bar{\mathcal{B}}$ e $\bar{\mathcal{N}}$, se obtém as submatrizes $A_{\bar{\mathcal{B}}}$ e $A_{\bar{\mathcal{N}}}$, respectivamente. Chamamos a matriz $A_{\bar{\mathcal{B}}}$ de *Base ou matriz básica do precondicionador Separador* no MPI primal-dual. A construção de $A_{\bar{\mathcal{B}}}$ não é um problema trivial, existem propostas que consideram as primeiras m colunas linearmente independentes de A considerando uma ordem não crescente dos elementos De_j, $\|ADe_j\|_2$, veja [5,6,9].

Em [5], provou-se que o número de condição do sistema de Equações Normais precondicionada pelo precondicionador Separador independe da iteração do MPI primal-dual. A matriz $A_{\bar{\mathcal{B}}}$ é chamada *Base de peso máximo*. Em termos práticos, em [9] mostrou-se que a ordenação das colunas de A considerando $\|ADe_j\|_2$ é mais eficiente no cálculo de $A_{\bar{\mathcal{B}}}$.

Uma vez obtida $A_{\bar{\mathcal{B}}}$, é considerada a permutação $\sigma = (\bar{\mathcal{B}}, \bar{\mathcal{N}}) \in \mathcal{S}_n$ (grupo simétrico de ordem n) com matriz de permutação associada $P : n \times n$. Reordenando as matrizes A e D usando P, tem-se: $A = [A_{\bar{\mathcal{B}}}, A_{\bar{\mathcal{N}}}]P$ e $PDP^T = \begin{pmatrix} D_{\bar{\mathcal{B}}} & 0 \\ 0 & D_{\bar{\mathcal{N}}} \end{pmatrix}$, onde $D_{\bar{\mathcal{B}}}$ e $D_{\bar{\mathcal{N}}}$ são matrizes diagonais com entradas d_i tal que $i \in \bar{\mathcal{B}}$ e $\bar{\mathcal{N}}$, respectivamente. Assim, o precondicionador Separador para o Sistema de Equações Normais é: $S = D_{\bar{\mathcal{B}}}^{-1/2} A_{\bar{\mathcal{B}}}^{-1}$. Observa-se que $S(ADA^T)S^T = I_m + WW^T$, onde $W = D_{\bar{\mathcal{B}}}^{-1/2} A_{\bar{\mathcal{B}}}^{-1} A_{\bar{\mathcal{N}}} D_{\bar{\mathcal{N}}}^{1/2}$. Logo, se existem suficientes índices em $i \in \bar{\mathcal{B}}$ tais que $d_i^k \to \infty$ e $i \in \bar{\mathcal{N}}$ tais que $d_i^k \to 0$, então W se aproxima da matriz nula e portanto, espera-se que $S(ADA^T)S^T = I_m + WW^T$ tenha seus autovalores próximos de 1.

3 Crossover

Quando o MPI usa o precondicionador Separador para resolver seus sistemas lineares, surge a ideia de usar a base do mesmo para obter uma base inicial do método Simplex. O processo que calcula uma solução básica factível no sentido da Definição 2.1, a partir de um ponto do MPI, veja [8], é chamado *crossover*. Isto é, recuperar uma solução básica factível a partir de um ponto interior associado a uma base do precondicionador Separador.

Neste trabalho, propõe-se obter uma base inicial B do método Simplex a partir de uma *Base de peso máximo* do precondicionador Separador, sempre que seja possível. Suponha que (x, s, y, w, z) seja o ponto de uma iteração do MPI primal-dual onde foi acionado o precondicionador Separador, isto é, $A_{\bar{\mathcal{B}}}$ foi calculada.

Para cada índice $i \in \bar{\mathcal{N}}$, verifica-se se x_i está mais próximo de 0 ou de u_i. Assim, se a comparação de distâncias: $d(x_i, 0) \leq d(x_i, u_i)$, define-se $\hat{x}_i = 0$, caso contrário, define-se $\hat{x}_i = u_i$, com isto dividimos o conjunto $\bar{\mathcal{N}}$ em $\bar{\mathcal{N}}_1$ e $\bar{\mathcal{N}}_2$. Depois disso, calcula-se $\hat{x}_{\bar{\mathcal{B}}} = A_{\bar{\mathcal{B}}}^{-1}(b - A_{\bar{\mathcal{N}}_1} 0_{\bar{\mathcal{N}}_1} - A_{\bar{\mathcal{N}}_2} u_{\bar{\mathcal{N}}_2})$, isto é, obtemos a solução básica primal $\hat{x}^T = (\hat{x}_{\bar{\mathcal{B}}}^T, 0_{\bar{\mathcal{N}}_1}^T, u_{\bar{\mathcal{N}}_2}^T)$, $\hat{s}^T = (u_{\bar{\mathcal{B}}}^T - \hat{x}_{\bar{\mathcal{B}}}^T, u_{\bar{\mathcal{N}}_1}^T, 0_{\bar{\mathcal{N}}_2}^T)$. Adicionalmente, calcula-se a solução básica dual dual $\hat{y} = A_{\bar{\mathcal{B}}}^{-T} c_{\bar{\mathcal{B}}}$, $\hat{z}^T = (0_{\bar{\mathcal{B}}}^T,\ \bar{c}_{\bar{\mathcal{N}}_1}^T,\ 0_{\bar{\mathcal{N}}_2}^T)$ e $\hat{w}^T = (0_{\bar{\mathcal{B}}}^T,\ 0_{\bar{\mathcal{N}}_1}^T,\ -\bar{c}_{\bar{\mathcal{N}}_2}^T)$. Logo, são verificadas as condições **C1** e **C2** dadas em (2) considerando os seguintes casos:

Caso 0 Se **C1** e **C2** são satisfeitas, então $A_{\bar{\mathcal{B}}}$ é base ótima do método Simplex primal e dual. Neste caso, o *crossover* não realiza nenhuma iteração do método Simplex, apenas uma omprovação de que a condição (2) é satisfeita. **Caso 1** Se **C1** é satisfeita e **C2** não é satisfeita, então $A_{\bar{\mathcal{B}}}$ é base factível primal que será base inicial do método primal Simplex, neste caso o *crossover* muda do MPI primal-dual para o método primal Simplex até convergir. **Caso 2** Se **C2** é satisfeita e **C1** não é satisfeita, então $A_{\bar{\mathcal{B}}}$ é base factível dual que será base inicial do método dual Simplex, neste caso o *crossover* muda do MPI primal-dual para o método dual Simplex até convergir. **Caso 3** Se **C1** e **C2** não são satisfeitas então neste caso o *crossover* não é realizado, o problema é resolvido apenas usando o MPI primal-dual.

Uma questão importante no *crossover* é saber em que iteração do MPI primal-dual fazer a mudança para o método Simplex, usa-se o critério: $\phi(x, s, y, z, w) \leq 1$, onde

$\phi(x, s, y, z, w) = \frac{\|(r_b, r_u)\|}{max(1, \|(b,u)\|)} + \frac{\|(r_c)\|}{max(1, \|c\|)} + \frac{|c^T x - (b^T y - \sum_{i \in \mathcal{N}_2} u_i w_i)|}{max(1, \|(b,u)\|, \|c\|)}$. Onde $r_b = b - Ax$, $r_u = u - x - s$ e $r_c = c + w - z - A^T y$. Ressaltamos que $\phi(x, s, y, z, w) \leq 10^{-8}$ é o critério de convergência do MPI.

4 Experimentos numéricos

Os experimentos numéricos foram realizados utilizando o *software* PCx modificado que usa métodos iterativos com uma Abordagem Híbrida (AH), veja [3], [2], e o *software* CPLEX. O MPI primal-dual combina o uso de dois precondicionadores: a Fatoração Controlada de Cholesky (FCC) e o Precondicionador Separador (PS). Quando o *crossover* é acionado, usa-se o CPLEX para terminar de resolver o problema de programação linear usando o Método Simplex (MS) seja este primal ou dual.

Tabela 1: Comparação de iterações do MS, MPI e crossover.

Problema	Iterações						MS	Distância
	MS	MPI com AH	*crossover* FCC	*crossover* PS	*crossover* MS	ϕ	usado	
dano3mip	39 834	–	6	1	29 234	$1.95 * 10^{-2}$	2	$2,4561 \cdot 10^{1}$
degen2	357	12	16	1	137	$2.81 * 10^{-2}$	2	$1,2191 \cdot 10^{-7}$
degen3	1 168	16	7	1	137	$4.51 * 10^{-2}$	2	$1,0477 \cdot 10^{0}$
fffff800	450	29	26	1	10	$1.20 * 10^{-6}$	1	$9,7136 \cdot 10^{2}$
ken11	9 828	22	20	1	1782	$2.06 * 10^{-3}$	1	$2,0045 \cdot 10^{1}$
kra30a	4 772 548	–	17	1	163 397	$4.87 * 10^{-4}$	2	$7,3275 \cdot 10^{2}$
maros-r7	3 401	22	21	1	0	$1.60 * 10^{-8}$	1	$5,8075 \cdot 10^{5}$
p12345	401	15	11	1	1	$1.70 * 10^{-3}$	2	$1,4027 \cdot 10^{-2}$
p19328	2 492	18	14	1	1	$7.28 * 10^{-4}$	1	$4,4656 \cdot 10^{-4}$
scr15	39 980	24	12	1	22 794	$1.13 * 10^{-3}$	2	$1,3465 \cdot 10^{0}$
scr20	98 869	21	14	1	31 512	$2.84 * 10^{-4}$	2	$7,4922 \cdot 10^{-1}$

$^{-}$ O problema não foi resolvido.

Na Tabela 1, apresenta-se o total de iterações do Método Simplex (MS), do Método de Pontos Interiores (MPI) e o do *crossover* proposto neste trabalho. Os problemas escolhidos

DOI: 10.5540/03.2021.008.01.0384

são das bibliotecas MESZÁROS, NETLIB e KENNINGTON. Para determinar o início do *crossover*, o valor da função ϕ deve ser menor que 1, este valor é apresentado na sexta coluna da tabela. Na última coluna, os números 1 e 2 indicam o tipo de método Simplex que foi escolhido após uma verificação das condições **C1** e **C2** dadas em (2). O número 1 indica o uso do método primal Simplex e o número 2, o método dual Simplex. Na primeira e segunda colunas da Tabela 1, apresenta-se o número de iterações do MS e do MPI primal-dual com AH. Já na terceira, quarta e quinta colunas apresentam-se o número de iterações realizadas no *crossover*. Finalmente, na coluna "Distância" exibimos a distância do ponto interior associado à base de peso máximo em relação ao vértice usado pelo Simplex.

Tabela 2: Número de iterações quando o método de escolha do CPLEX é accionada.

Problema	Iterações						MO	Distância
	MS	MPI	*crossover*					
		com AH	FCC	PS	MS	ϕ	usado	
aa03	1 996	–	8	1	1 668	$3.22 * 10^{-1}$	2	$1,1591 \cdot 10^{-4}$
air06	1 996	–	8	1	1 668	$3.22 * 10^{-1}$	2	$1,1591 \cdot 10^{-4}$
cre-a	2 241	27	22	1	680	$9.43 * 10^{-1}$	2	$2,5825 \cdot 10^{3}$
cre-c	1 912	26	18	1	1 385	$8.27 * 10^{-1}$	2	$2,3263 \cdot 10^{2}$
ganges	255	17	11	1	53	$3.21 * 10^{-4}$	2	$1,5615 \cdot 10^{5}$
maros	855	22	21	1	608	$9.46 * 10^{-1}$	2	$1,0434 \cdot 10^{6}$
model2	1 446	24	10	1	1 216	$7.06 * 10^{-1}$	2	$1,9917 \cdot 10^{2}$
nemsemm2	6 282	42	35	1	1 159	$6.73 * 10^{-6}$	2	$1,8616 \cdot 10^{2}$
nug05-3rd	590	–	2	1	282	$3.95 * 10^{-2}$	2	$2,5871 \cdot 10^{-4}$
pcb1000	1 548	25	10	1	534	$5.94 * 10^{-2}$	2	$2.6041 \cdot 10^{0}$
progas	1 039	–	5	1	285	$1.20 * 10^{-1}$	2	$8,417 \cdot 10^{-4}$
qap8	2 210	10	3	1	2 210	$1.36 * 10^{-2}$	2	$4,1587 \cdot 10^{-2}$
seymour	6 515	20	16	1	29	$1.84 * 10^{-4}$	2	$1,2169 \cdot 10^{1}$
stocfor2	1 033	21	10	1	250	$3.66 * 10-1$	2	$5,6512 \cdot 10^{-8}$
x2	866	–	6	1	68	$7.32 * 10^{-1}$	2	$4,7831 \cdot 10^{-4}$

$^{-}$ O problema não foi resolvido.

Na Tabela 2, permitimos que o CPLEX escolha a variante do método Simplex a ser usada. Na última coluna, o número 2 representa ao método dual Simplex. Observa-se que a partir da base obtida pelo Precondicionador Separador é possível obter uma solução factível e, portanto, o número de iterações do método Simplex é reduzido, como apresentado nas Tabelas 1 e 2. Em particular, esta redução é evidente no problema `kra30a`, pois são quase 5 milhões de iterações do MS comparados com 18 iterações do MPI e mais de 160 mil iterações de método Simplex dual. Destaca-se outros problemas como `maros-r7`, `p12345` e `p19328`, pois o número total de iterações do MS é menor o igual a 1. Outro fato que deve-se destacar é o cálculo do PS em todos os problemas, pois só foi necessário o computo de uma base para iniciar o *crossover*.

5 Conclusões

Concluímos que usando uma *base do peso máximo* do Precondicionador Separador é possível achar uma solução básica para o método Simplex em grande parte dos problemas testados, quando isto não é possível, o problema é resolvido apenas usando o MPI primal-dual. Quando o *crossover* é acionado o número de iterações do método Simplex é reduzido consideravelmente e ainda existem problemas que nao foram resolvidos usando apenas o MPI primal-dual, no entanto usando a abordagem do *crossover* isto foi possível.

Da mesma forma, acreditamos que é importante levar em consideração as diferentes modificações que devem ser feitas tanto no precondicionador FCC quanto no critério de mudança de método. Desta maneira, poderão ser desenvolvidas novas pesquisas no contexto do *crossover* usando a Abordagem Híbrida.

Referências

[1] L. Casacio, C. Lyra, A. R. L. Oliveira e C. O. Castro. Improving the preconditioning of linear systems from interior point methods, *Computers & Operations Research.* 85:129-138, 2017.

[2] M. R. Heredia, C. O. Castro e A. R. L. Oliveira. A New Hybrid Preconditioner for the Interior Point Method, *TEMA*, 20: 359-379, 2019. DOI: 10.5540/tema.2019.020.02.0359.

[3] M.R. Heredia e A.R.L. Oliveira, A new proposal to improve the early iterations in the interior point method. Ann Oper Res 287, 185–208, 2020. DOI; 10.1007/s10479-019-03254-7

[4] F. S. Hillier e G. J. Lieberman. *Introdução à Pesquisa Operacional*, McGraw Hill Brasil, 2013.

[5] R. Monteiro, J. O'Neal e T. Tsuchiya, Uniform Boundedness of a Normal Matrix Used in Interior-Point Methods. *SIAM Journal on Optimization*, 15: 96-100, 2004. DOI: 10.1137/S1052623403426398

[6] A. R. L. Oliveira e D. C. Sorensen, A New Class of Preconditioners for Large-Scale Linear Systems from Interior Point Methods for Linear Programming. *Linear Algebra and Its Applications*, 394:1-24, 2005

[7] R. Saigal. *Linear Programming: A Modern Integrated Analysis.* International Series in Operations Research & Management Science, Springer US, 2012

[8] L. Schork e J. Gondzio. Implementation of an interior point method with basis preconditioning. Mathematical Programming Computation. 2020. DOI:10.1007/s12532-020-00181-8.

[9] M. I. Velazco e A. R. L. Oliveira. Computing the Splitting Preconditioner for Interior Point Method Using an Incomplete Factorization Approach. *Operations Research Proceedings 2017.* Springer International Publishing, pages 97-103, 2018.

