

# A equação de Laplace num semidisco sob a condição de fronteira mista Dirichlet-Neumann

Roberto Toscano Couto<sup>1</sup>  
UFF, Niterói, RJ

**Resumo.** Calcula-se por dois modos a solução da equação de Laplace num semidisco sob uma condição de fronteira de Dirichlet na base e uma de Neumann na circunferência. O primeiro modo consiste na superposição de uma solução calculada por separação de variáveis e uma calculada por transformada de Fourier. O segundo, no uso da função de Green determinada pelo método das imagens. Os dois modos produzem expressões idênticas para a solução.

**Palavras-chave.** equação de Laplace, semidisco, Dirichlet, Neumann, função de Green, método das imagens

## 1 Introdução

Neste trabalho calculamos a solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r, \theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 & \text{se } r \in (0, b) \text{ e } \theta \in (0, \pi) \\ u(r, 0) = 0 & \text{se } r \in [0, b] \\ u(r, \pi) = f(r) & \text{se } r \in (0, b] \\ \frac{\partial u}{\partial r}(b, \theta) = g(\theta) & \text{se } \theta \in (0, \pi) \end{cases} \quad (1)$$

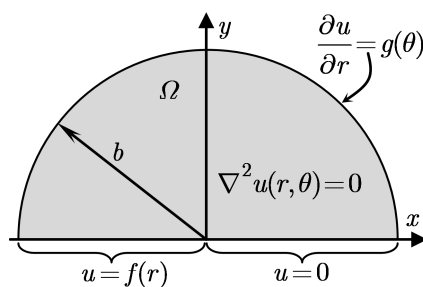


Figura 1: O problema resolvido.

A equação diferencial parcial (EDP) cuja solução se calcula é a equação de Laplace. Trata-se do problema de valor de fronteira cujo domínio  $\Omega$  é o semidisco mostrado na Figura 1, onde se resolve essa EDP nas coordenadas polares sob condições de fronteira mistas, de Dirichlet na base e de Neumann na circunferência.

Dois modos de calcular a solução do problema são apresentados. Na seção 2, ela é obtida pela superposição de duas soluções, a do problema em que a condição de fronteira na base é homogeneizada (v. Figura 2), calculada por separação de variáveis, com a do problema em que tal homogeneização se dá na circunferência (v. Figura 3), calculada por transformada de Fourier. Na seção 3, a solução é calculada pela função de Green, que é determinada pelo método das imagens.

O cotejo dos dois modos de cálculo permite compreender as limitações e as vantagens de cada um. Além disso, ao fim da descrição deles, logo se percebe a possibilidade de empregá-los para resolver vários problemas derivados de modificações do problema resolvido.

<sup>1</sup>rtoscano@id.uff.br

## 2 Separação de variáveis e transformada de Fourier

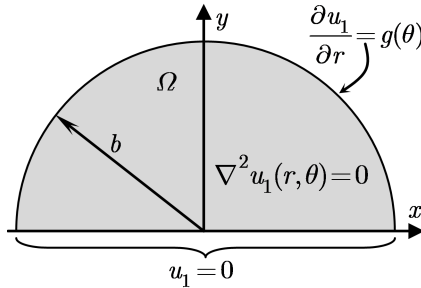


Figura 2: Problema com a condição de fronteira na base homogeneizada.

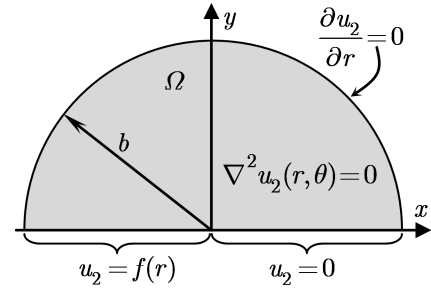


Figura 3: Problema com a condição de fronteira na circunferência homogeneizada.

A solução  $u$  do problema na Figura 1 é a superposição das soluções  $u_1$  e  $u_2$  dos problemas nas Figuras 2 e 3, respectivamente:

$$u(r, \theta) = u_1(r, \theta) + u_2(r, \theta) . \quad (2)$$

### 2.1 Resolução por separação de variáveis do problema na Figura 2

Substituindo  $u_1(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$  em  $\nabla^2 u_1 = 0$  e separando as variáveis, obtemos

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0 \quad \xrightarrow{\times \frac{r^2}{R\Theta}} \quad \frac{\overbrace{r^2R'' + rR'}}{R} + \frac{\overbrace{\Theta''}^{-\lambda}}{\Theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Temos que  $u_1(r, 0) = R(r)\Theta(0) = 0 \Rightarrow \Theta(0) = 0$  e  $u_1(r, \pi) = R(r)\Theta(\pi) = 0 \Rightarrow \Theta(\pi) = 0$ ; essas condições e a EDO para  $\Theta(\theta)$  em (3) formam um problema de autovalor de solução bem conhecida {Ref. [5], seq. 11.4, Exemplo 1}:

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0, \quad \theta \in (0, \pi) \\ \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_n = n^2 \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \\ \Theta_n(\theta) = \text{sen}n\theta \end{cases} .$$

Agora resolvemos a EDO para  $R(r)$  em (3) com esses valores de  $\lambda$  {Ref. [5], seq. 6.1, eq. (2)}:

$$r^2R_n'' + rR_n' - n^2R_n = 0 \quad \Rightarrow \quad R_n(r) = C_n r^n + D_n/r^n ,$$

onde devemos fazer  $D_n = 0$  para evitar infinitude quando  $r = 0$ . Logo, a solução mais geral é

$$u_1(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\Theta_n(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^n \text{sen}n\theta . \quad (4)$$

Calculamos as constantes  $C_n$  impondo a condição na fronteira circular, o que resulta numa série de Fourier em senos cujos coeficientes as envolvem:

$$\frac{\partial u_1}{\partial r}(b, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n b^{n-1} \text{sen}n\theta = g(\theta) \quad \Rightarrow \quad nC_n b^{n-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(\theta) \text{sen}n\theta \, d\theta .$$

Substituindo essa expressão de  $C_n$  (com a variável de integração  $\theta$  trocada por  $\theta'$ ) em (4), obtemos

$$u_1(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{\pi n b^{n-1}} \int_0^\pi g(\theta') \text{sen}n\theta' \, d\theta' \right] r^n \text{sen}n\theta = \frac{b}{\pi} \int_0^\pi \underbrace{\left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n 2 \text{sen}n\theta' \text{sen}n\theta}{n b^n} \right]}_S g(\theta') \, d\theta' . \quad (5)$$

O somatório  $S$ , usando  $2 \operatorname{sen} n\theta' \operatorname{sen} n\theta = \cos n(\theta' - \theta) - \cos n(\theta' + \theta)$ , pode ser escrito na forma

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n [\cos n(\theta' - \theta) - \cos n(\theta' + \theta)]}{nb^n} = \sigma(\theta' - \theta) + \sigma(\theta' + \theta); \quad \sigma(\varphi) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{b}\right)^n \cos n\varphi. \quad (6)$$

Se  $z \equiv (r/b)e^{i\varphi}$ , então  $z^n = (r/b)^n e^{in\varphi} = (r/b)^n \cos n\varphi + i(r/b)^n \operatorname{sen} n\varphi$ , e, portanto,

$$\begin{aligned} \sigma(\varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} z^n}{n} = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z \zeta^{n-1} d\zeta = \operatorname{Re} \int_0^z \left( \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^{n-1} \right) d\zeta = \operatorname{Re} \int_0^z \left( \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \right) d\zeta \\ &= \operatorname{Re} \int_0^z \frac{d\zeta}{1-\zeta} = \operatorname{Re}[-\ln(1-z)] = -\operatorname{Re}[\ln|1-z| + i \arg(1-z)] = -\ln|1-z| = -\ln \left| 1 - \frac{r}{b} e^{i\varphi} \right| \\ &= -\ln \left| 1 - \frac{r}{b} \cos \varphi - i \frac{r}{b} \operatorname{sen} \varphi \right| = -\ln \sqrt{\left(1 - \frac{r}{b} \cos \varphi\right)^2 + \left(\frac{r}{b} \operatorname{sen} \varphi\right)^2} \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{2r}{b} \cos \varphi + \frac{r^2}{b^2} \right) = -\frac{1}{2} \ln \frac{b^2 - 2br \cos \varphi + r^2}{b^2} = -\frac{1}{2} \ln [b^2 - 2br \cos \varphi + r^2] + \ln b. \end{aligned}$$

Esse resultado, levado em (6), produz

$$S = -\frac{1}{2} \ln [b^2 - 2br \cos(\theta' - \theta) + r^2] + \frac{1}{2} \ln [b^2 - 2br \cos(\theta' + \theta) + r^2] = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 - 2br \cos(\theta' + \theta) + r^2}{b^2 - 2br \cos(\theta' - \theta) + r^2}, \quad (7)$$

o qual, por sua vez, levado em (5), fornece, finalmente,

$$u_1(r, \theta) = \frac{b}{2\pi} \int_0^\pi \ln \frac{b^2 - 2br \cos(\theta' + \theta) + r^2}{b^2 - 2br \cos(\theta' - \theta) + r^2} g(\theta') d\theta'. \quad (8)$$

## 2.2 Resolução por transformada de Fourier do problema na Figura 3

Se mudarmos para a variável

$$\rho = -\ln(r/b) \quad [ \Rightarrow \quad r = b e^{-\rho}, \quad \text{com } \rho \in (0, \infty) ], \quad (9)$$

a EDP  $\nabla^2 u_2(r, \theta) = 0$ , ou  $r^2 \partial^2 u_2 / \partial r^2 + r \partial u_2 / \partial r + \partial^2 u_2 / \partial \theta^2 = 0$ , toma a forma

$$\partial^2 U_2 / \partial \rho^2 + \partial^2 U_2 / \partial \theta^2 = 0 \quad [ u_2(r, \theta) = u_2(b e^{-\rho}, \theta) \equiv U_2(\rho, \theta) ], \quad (10)$$

pois, pela regra da cadeia, conclui-se que

$$(i) \quad r \frac{\partial u_2}{\partial r}(r, \theta) = -\frac{\partial U_2}{\partial \rho}(\rho, \theta) \quad \text{e} \quad (ii) \quad r^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial U_2}{\partial \rho}. \quad (11)$$

Aplicando em (10) a transformada de Fourier em cossenos definida por

$$\mathcal{F}_c\{U_2(\rho, \theta)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty U_2(\rho, \theta) \cos k\rho d\rho \equiv \bar{U}_2(k, \theta), \quad (12)$$

obtemos {Ref. [1], seq. 7.6, p. 279}

$$\begin{aligned} -k^2 \bar{U}_2(k, \theta) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \overbrace{\frac{\partial U_2}{\partial \rho}(\rho, \theta)}^0 \Big|_{\rho=0} + \frac{d^2 \bar{U}_2}{d\theta^2}(k, \theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \bar{U}_2}{d\theta^2} - k^2 \bar{U}_2(k, \theta) = 0 \\ \Rightarrow \quad \bar{U}_2(k, \theta) = c_1 \cosh k\theta + c_2 \operatorname{senh} k\theta, \end{aligned} \quad (13)$$

onde o termo indicado como nulo é explicado com base na equação (i) em (11) e na condição homogênea na circunferência:  $\frac{\partial U_2}{\partial \rho}(\rho, \theta) \Big|_{\rho=0} = -r \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial r}(r, \theta)}_0 \Big|_{r=b} = 0$ .

Para calcular as constantes  $c_1$  e  $c_2$  em (13), usamos as condições de Dirichlet na base do semidisco, sendo necessário, antes, tomar a transformada de Fourier em cossenos delas:

$$u_2(r, 0) = 0 \implies U_2(\rho, 0) = 0 \xrightarrow{\mathcal{F}_c} \bar{U}_2(k, 0) = c_1 = 0 .$$

$$u_2(r, \pi) = f(r) \implies U_2(\rho, \pi) = F(\rho) \xrightarrow{\mathcal{F}_c} \bar{U}_2(k, \pi) = c_2 \sinh k\pi = \mathcal{F}_c\{F(\rho)\} \implies c_2 = \mathcal{F}_c\{F(\rho)\} / \sinh k\pi ,$$

onde definimos  $f(r) = f(b e^{-\rho}) \equiv F(\rho)$ . Com  $c_1$  e  $c_2$  assim determinados, (13) passa a ser

$$\bar{U}_2(k, \theta) = \frac{\mathcal{F}_c\{F(\rho)\}}{\sinh k\pi} \sinh k\theta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sinh k\theta}{\sinh k\pi} \int_0^\infty F(\rho') \cos k\rho' d\rho' .$$

Tomando a transformada inversa e trocando a ordem das integrações, obtemos

$$U_2(\rho, \theta) = \mathcal{F}_c^{-1}\{\bar{U}_2(k, \theta)\} = \mathcal{F}_c^{-1}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sinh k\theta}{\sinh k\pi} \int_0^\infty F(\rho') \cos k\rho' d\rho'\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sinh k\theta}{\sinh k\pi} \int_0^\infty F(\rho') \cos k\rho' d\rho'\right\} \cos k\rho dk$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \underbrace{\left(\int_0^\infty \frac{\sinh k\theta}{\sinh k\pi} 2 \cos k\rho' \cos k\rho dk\right)}_I F(\rho') d\rho' . \tag{14}$$

Para calcular a integral denotada acima por  $I$ , usamos a identidade trigonométrica  $2 \cos k\rho' \cos k\rho = \cos k(\rho' - \rho) + \cos k(\rho' + \rho)$ , em seguida (na passagem indicada por  $\stackrel{*}{=}$ ) valemo-nos da fórmula 3.981-5 listada na referência [3], e então eliminamos  $\rho$  e  $\rho'$ , voltando para a variável  $r$  e  $r'$ , obtendo

$$I = \int_0^\infty \frac{\sinh k\theta}{\sinh k\pi} 2 \cos k\rho' \cos k\rho dk = \int_0^\infty \frac{\sinh k\theta}{\sinh k\pi} \cos k(\rho' - \rho) dk + \int_0^\infty \frac{\sinh k\theta}{\sinh k\pi} \cos k(\rho' + \rho) dk$$

$$\stackrel{*}{=} \frac{(1/2) \operatorname{sen} \theta}{\cosh(\rho' - \rho) + \cos \theta} + \frac{(1/2) \operatorname{sen} \theta}{\cosh(\rho' + \rho) + \cos \theta} = \frac{(1/2) \operatorname{sen} \theta}{\frac{r'^2 + r^2}{2rr'} + \cos \theta} + \frac{(1/2) \operatorname{sen} \theta}{\frac{b^2 + (rr'/b)^2}{2rr'} + \cos \theta}$$

$$= \left[ \frac{1}{r'^2 + r^2 + 2rr' \cos \theta} + \frac{1}{(rr'/b)^2 + b^2 + 2rr' \cos \theta} \right] rr' \operatorname{sen} \theta . \tag{15}$$

Substituindo esse resultado em (14), tendo em conta que  $\int_0^\infty F(\rho') d\rho' = \int_b^0 f(r') (-dr'/r')$ , e lembrando que  $U_2(\rho, \theta) = u_2(r, \theta)$ , concluímos o cálculo desta seção:

$$u_2(r, \theta) = \frac{r \operatorname{sen} \theta}{\pi} \int_0^b \left[ \frac{1}{r'^2 + r^2 + 2rr' \cos \theta} + \frac{1}{(rr'/b)^2 + b^2 + 2rr' \cos \theta} \right] f(r') dr' . \tag{16}$$

### 3 Função de Green determinada pelo método das imagens

#### 3.1 Formulação

O valor da solução  $u$  do problema em (1) num ponto  $\vec{r}$  do domínio  $\Omega$  pode ser expresso pela seguinte integral de linha na fronteira  $\partial\Omega$  (percorrida na orientação positiva convencional), conhecida como *representação de Green* {Ref. [4], seq. VII.9; Ref. [2], eq. (5.0.13)}:

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left[ G(\vec{r}|\vec{r}') \frac{\partial u}{\partial n'}(\vec{r}') - \frac{\partial G}{\partial n'}(\vec{r}|\vec{r}') u(\vec{r}') \right] ds' , \tag{17}$$

sendo, nesse caso bidimensional, a função de Green  $G(\vec{r}|\vec{r}')$  dada pela soma da função  $\mathcal{H}(|\vec{r}' - \vec{r}|) \equiv \ln [1/|\vec{r}' - \vec{r}|]$ , harmônica se  $\vec{r}' \neq \vec{r}$  {Ref. [4], Exemplo VII.3.1}, com qualquer outra função  $v(\vec{r}')$  harmônica em  $\Omega$ , isto é,

$$\begin{cases} G(\vec{r}|\vec{r}') = \ln \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} + v(\vec{r}') , & \text{com } \vec{r} \text{ e } \vec{r}' \text{ em } \bar{\Omega} \equiv \Omega \cup \partial\Omega , \\ \text{onde } \nabla'^2 v(\vec{r}') = 0 \text{ se } \vec{r}' \in \Omega . \end{cases} \tag{18}$$

$$\tag{19}$$



lei dos cossenos) em função das coordenadas polares das variáveis vetoriais  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$  de  $G(\vec{r}|\vec{r}')$ :

$$\begin{cases} z \equiv |\vec{r}' - \vec{r}| = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\theta' - \theta)} \\ z^\dagger \equiv |\vec{r}' - \vec{r}^\dagger| = \sqrt{r'^2 + r^{\dagger 2} - 2r'r^\dagger \cos(\theta' - \theta)} = \frac{b}{r} \sqrt{(rr'/b)^2 + b^2 - 2r'r \cos(\theta' - \theta)} \\ z^* \equiv |\vec{r}' - \vec{r}^*| = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\theta' + \theta)} \\ z^{*\dagger} \equiv |\vec{r}' - \vec{r}^{*\dagger}| = \sqrt{r'^2 + r^{\dagger 2} - 2r'r^\dagger \cos(\theta' + \theta)} = \frac{b}{r} \sqrt{(rr'/b)^2 + b^2 - 2r'r \cos(\theta' + \theta)} \end{cases} \quad (24)$$

A inversão em relação a uma circunferência se baseia {v. Ref. [2], Fig.5.7.1} em se exigir a validade da equação  $\lambda z^\dagger = z$  (no caso dos pontos  $P$  e  $P^\dagger$ ) para qualquer  $\vec{r}'$  na circunferência, isto é, quando  $r' = b$ . Usando  $b$  como subíndice de qualquer das distâncias em (24) quando  $P'$  jaz na circunferência, essa relação básica entre  $z$  e  $z^\dagger$ , e entre  $z^*$  e  $z^{*\dagger}$ , pode ser escrita na forma

$$\lambda z_b^\dagger = z_b \quad \text{e} \quad \lambda z_b^{*\dagger} = z_b^*, \quad \text{onde} \quad z_b = z|_{r'=b}, \quad z_b^\dagger = z^\dagger|_{r'=b}, \quad \text{etc.} \quad (25)$$

Que a função  $v(\vec{r}')$  indicada em (22) satisfaz (19) decorre do fato de  $\vec{r}^*$ ,  $\vec{r}^\dagger$  e  $\vec{r}^{*\dagger}$  não estarem em  $\Omega$ . Que (22) satisfaz a condição (i) em (20) segue do fato de  $|\vec{r}' - \vec{r}| = |\vec{r}' - \vec{r}^*|$  e  $|\vec{r}' - \vec{r}^\dagger| = |\vec{r}' - \vec{r}^{*\dagger}|$  quando  $\vec{r}' \in \partial\Omega$ , o que é mais evidente imaginando-se, na Figura 4, que  $P' \in \partial\Omega_1$ .

Resta mostrar que (22) satisfaz a condição (ii) em (20), o que requer alguns cálculos. Usando (24) para reescrever (22) (note que o parâmetro  $\lambda$  é cancelado), e usando (25), temos que

$$\begin{aligned} G(\vec{r}|\vec{r}') &= \underbrace{-\ln z - \ln z^\dagger}_{G_1} + \underbrace{\ln z^* + \ln z^{*\dagger}}_{G_2}. \quad (26) \\ \therefore \frac{\partial G_1}{\partial n'}(\vec{r}|\vec{r}') \Big|_{\vec{r}' \in \partial\Omega_2} &= \frac{\partial G_1}{\partial r'} \Big|_{r'=b} = \left[ -\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial r'} - \frac{1}{z^\dagger} \frac{\partial z^\dagger}{\partial r'} \right]_{r'=b} \\ &= -\frac{1}{z_b} \frac{b - r \cos(\theta' - \theta)}{z_b} - \frac{1}{z_b^\dagger} \frac{r^2/b - r \cos(\theta' - \theta)}{\underbrace{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos(\theta' - \theta)}}_{z_b}} = -\frac{\overbrace{b^2 + r^2 - 2br \cos(\theta' - \theta)}^{z_b^2}}{bz_b^2} = -\frac{1}{b}. \end{aligned}$$

Analogamente obtém-se  $\partial G_2/\partial n'|_{\vec{r}' \in \partial\Omega_2} = 1/b$ . Logo, se  $\vec{r}' \in \partial\Omega_2$ , então  $\partial G/\partial n' = \partial G_1/\partial n' + \partial G_2/\partial n' = -1/b + 1/b = 0$ , provando (ii) em (20). Está assim comprovado que (22), ou (26), é a função de Green do problema em (1).

## 4 Cálculo da solução

Usando (26) e (24), calculemos a parcela da solução dada por (21) que é lá designada por  $u_1(r, \theta)$ . O integrando neste termo é assim desenvolvido:

$$\begin{aligned} \left[ G(\vec{r}|\vec{r}') \frac{\partial u}{\partial n'}(\vec{r}') ds' \right]_{\vec{r}' \in \partial\Omega_2} &= \left[ \ln \left( \frac{z^* z^{*\dagger}}{z z^\dagger} \right) \frac{\partial u}{\partial r'}(r', \theta') b d\theta' \right]_{r'=b} \\ &= b \ln \frac{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos(\theta' + \theta)}}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos(\theta' - \theta)}} \frac{(b/r) \sqrt{r^2 + b^2 - 2br \cos(\theta' + \theta)}}{(b/r) \sqrt{r^2 + b^2 - 2br \cos(\theta' - \theta)}} g(\theta') d\theta' \\ &= b \ln \left[ \frac{r^2 + b^2 - 2br \cos(\theta' + \theta)}{r^2 + b^2 - 2br \cos(\theta' - \theta)} \right] g(\theta') d\theta'. \end{aligned}$$

Substituindo este resultado, obtemos exatamente a equação (8), resultante da separação de variáveis:

$$u_1(r, \theta) = \frac{b}{2\pi} \int_0^\pi \ln \left[ \frac{r^2 + b^2 - 2br \cos(\theta' + \theta)}{r^2 + b^2 - 2br \cos(\theta' - \theta)} \right] g(\theta') d\theta'. \quad (27)$$

Calculemos agora a parcela da solução dada por (21) que é lá designada por  $u_2(r, \theta)$ . Usando (26) e (24), obtemos a seguinte expressão para o integrando neste termo:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial G}{\partial \bar{n}'}(\bar{r}'|\bar{r}') u(\bar{r}') ds' \right]_{\bar{r}' \in \partial \Omega_1} = \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial G}{\partial \theta'}(r, \theta|r', \theta') u(r', \theta') (-dr') \right]_{\theta' = \pi} \\ & = -\frac{f(r') dr'}{r'} \left[ \frac{\partial G}{\partial \theta'}(r, \theta|r', \theta') \right]_{\theta' = \pi} = -\frac{f(r') dr'}{r'} \frac{\partial}{\partial \theta'} [-\ln z + \ln z^* - \ln z^\dagger + \ln z^{*\dagger}]_{\theta' = \pi} \\ & = \frac{f(r') dr'}{r'} \frac{\partial}{\partial \theta'} \left[ \underbrace{\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial \theta'}}_{z^*} - \frac{1}{z^*} \frac{\partial z^*}{\partial \theta'} + \frac{1}{z^\dagger} \frac{\partial z^\dagger}{\partial \theta'} - \frac{1}{z^{*\dagger}} \frac{\partial z^{*\dagger}}{\partial \theta'} \right]_{\theta' = \pi} \\ & = \frac{f(r') dr'}{r'} \left[ \frac{2r' r \operatorname{sen} \theta}{r'^2 + r^2 + 2r' r \cos \theta} + \frac{2r' r \operatorname{sen} \theta}{(r' r/b)^2 + b^2 + 2r' r \cos \theta} \right], \end{aligned}$$

cuja substituição em (21) fornece exatamente a equação (16), obtida por transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} u_2(r, \theta) &= -\frac{1}{2\pi} \int_b^0 \frac{f(r') dr'}{r'} \left[ \frac{2r' r \operatorname{sen} \theta}{r'^2 + r^2 + 2r' r \cos \theta} + \frac{2r' r \operatorname{sen} \theta}{(r' r/b)^2 + b^2 + 2r' r \cos \theta} \right] \\ &= \frac{r \operatorname{sen} \theta}{\pi} \int_0^b \left[ \frac{1}{r'^2 + r^2 + 2r' r \cos \theta} + \frac{1}{(r' r/b)^2 + b^2 + 2r' r \cos \theta} \right] f(r') dr'. \quad (28) \end{aligned}$$

## 5 Conclusões

É interessante constatar, num problema de domínio finito, o uso da transformada de Fourier. A possibilidade desse uso transparece com a mudança de variável em (9), mas também pode ser entendida resolvendo-se o problema da seção 2.2 pelo método alternativo, porém equivalente, de separar as variáveis. Assim se obtém um problema de autovalor de espectro *contínuo* na variável radial; portanto, para expandir a solução em termos das autofunções, é necessário realizar, não um somatório, mas uma integração, que é a inversa da própria transformada de Fourier usada.

Percebe-se a agradável possibilidade de não só se realizar o somatório infinito que surge na separação de variáveis [v. (5) e (7)] como também a de se efetuar a integral associada à transformada de Fourier inversa [v. (14) e (15)]. Sem isso não seria possível verificar tão facilmente que a solução obtida por esses dois métodos, a soma de (8) e (16), é igual à solução obtida pela função de Green determinada pelo método das imagens, a soma de (27) e (28); elas têm formas idênticas.

Corriqueiramente não ocorre essa *agradável* possibilidade (ela é excepcional), o que permite dizer que, comparativamente, o método da função de Green calculada pelo método das imagens leva mais diretamente a uma forma de solução mais aprimorada, mais *fechada*. Entretanto, este método tem aplicação bem menos vasta, sendo raro se conseguir determinar as imagens necessárias.

## Referências

- [1] Butkov, E. *Física Matemática*. LTC, Rio de Janeiro, 1988.
- [2] Duffy, D. G. *Green's Functions with Applications*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2001.
- [3] Gradshteyn, I. S. e Ryzhik, I. M., editado por Jeffrey, A. e Zwillinger, D. *Table of Integrals, Series, and Products, Seventh Edition*. Academic Press (Elsevier), Amsterdã, 2007.
- [4] Zachmanoglou, E. C. e Thoe, D. W. *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*. Dover, Nova York, 1976.
- [5] Zill, D. G. e Cullen, M. R. *Equações Diferenciais*. Pearson/Makron Books, São Paulo, 2001.