Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 2, N. 1, 2014.
Trabalho apresentado no CMAC-Sul, Curitiba-PR, 2014.

Análise das propriedades *phase-lag* e erro de amplificação do método RK-Butcher

Heloisa H. M. Silva
Depto de Matemática Aplicada, IBILCE, UNESP,
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: hsilva@ibilce.unesp.br

Resumo: *Consideramos, neste trabalho, as propriedades phase-lag e erro de amplificação de um método embutido de Runge-Kutta, denominado algoritmo RK-Butcher [2], para problemas de valor inicial que apresentam soluções oscilatórias e verificamos sua eficiência através de problemas testes. As propriedades de estabilidade deste método para problemas de valor inicial de primeira ordem foram analisadas em [5].*

Palavras-chave: *Equações diferencias ordinárias, métodos de Runge-Kutta, problemas oscilatórios.*

1 Introdução

Neste trabalho estamos interessados na resolução numérica de problemas de valor inicial de primeira ordem da forma

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = \eta, \tag{1}$$

que possuem soluções oscilatórias. Para estes tipos de problemas é essencial considerarmos as propriedades *phase-lag* (ou dispersão) e amplificação (ou dissipação). Estas propriedades são, na verdade, dois tipos de erros de truncamento. O primeiro é o ângulo entre a solução verdadeira e a solução aproximada enquanto o segundo é a distância de uma solução cíclica padrão. Aplicações dos métodos de Runge-Kutta (RK) para solução de problemas do tipo (1) foram primeiramente considerados por Brusa e Nigro[1] que introduziram a propriedade phase-lag como uma ferramenta para analisar o comportamento dos métodos para problemas com soluções oscilatórias. Desde então, vários trabalhos voltados para análise e desenvolvimento de métodos do tipo explícito e implícito para equações diferencias ordinárias de primeira e segunda ordem, foram publicados, entre os quais citamos Van der Houwen e Sommeijer [9], [10], Calvo e outros [3], Chawla e Al-Zanaid [4], Senu e outros [6].

2 Erros de Dispersão e Amplificação

Para examinar as propriedades de estabilidade de métodos numéricos para a resolução de problemas oscilatórios do tipo (1), a equação teste relevante é dada por

$$y' = i\omega y, \, \omega \in \Re, \, i = \sqrt{-1}, \tag{2}$$

cuja solução exata é $y(t) = \exp(i\omega t)$.

Um método geral de Runge-Kutta explícito, com s estágios para resolução de problemas de valor inicial de primeira ordem dados pela equação (1) é definido por

$$y_{n+1} \;\; = \;\; y_n + \sum_{i=1}^{s} b_i K_i, \tag{3}$$

$$K_i \;=\; f\left(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}K_j\right),$$

com $c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, s$, c e b vetores s-dimensionais e $A = (a_{ij})$ uma matriz $s \times s$. Usando a notação matricial de Butcher o método é escrito como

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s
\end{array} \tag{4}$$

Assim, aplicando o método de Runge-Kutta ao problema teste (2) obtém-se a solução numérica

$$y_n = a_s^n y_0, \;\; a_s = A_s(H^2) + iHB_s(H^2), \tag{5}$$

onde $h = \omega H$, A_s e B_s são polinômios em H^2 definidos pelos parâmetros c_i, $a_{i,j}$ e b_i, $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, i-1$. O fator de amplificação é $a_s = a_s(H)$, e y_n denota a aproximação para $y(t_n)$.

Através de uma comparação da solução numérica (5) com a solução de (2), dada por $y(t_n) = y_0 \exp{(inH)}$, Sideridis e Simos [7] definem os conceitos e resultados apresentados a seguir.

Definição 1 *Denomina-se, respectivamente, erro de dispersão (ou phase-lag) e erro de amplificação do método de Runge-Kutta (4) às quantidades:*

$$pl(H) = H - arg[a_s(H)], \quad a(H) = 1 - |a_s(H)|$$

Definição 2 *Se $pl(H) = O(H^{r+1})$ e $a(H) = O(H^{s+1})$, então diz-se que o método de Runge-Kutta (4) tem, respectivamente, ordem phase-lag r e ordem dissipativa q.*

Teorema 1 *Se o método de Runge-Kutta dado por (4), (5) possui ordem phase-lag r então:*

$$\tan H - \frac{H\,B_s(H^2)}{A_s(H^2)} = c\,H^{r+1} + O(H^{r+3}), \tag{6}$$

onde c é a constante phase-lag do método.

Como consequência desse resultado temos que se o método de Runge-Kutta tem ordem *phase-lag* r, então podemos reescrever $pl(H)$ como

$$pl(H) = tan(H) - \frac{HB_s(H^2)}{A_s(H^2)}. \tag{7}$$

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0062

3 O método RK-Butcher

O método RK-Butcher é um método embutido de Runge-Kutta, isto é, um par de fórmulas de Runge-Kutta, com 6 estágios, que aplicado ao problema (1) produz duas aproximações y_{n+1} e y^*_{n+1} para $y(t_{n+1})$ $(t_{n+1} = t_n + h)$, de ordens algébricas $p = 5$ e $p^* = 4$, respectivamente, onde

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{90}(7K_1 + 32K_3 + 12K_4 \\ &\quad +32K_5 + 7K_6), \end{aligned} \tag{8}$$

$$y^*_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 4K_4 + K_6), \tag{9}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(x_n, y_n), \\ K_2 &= hf(x_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{K_1}{4}) \\ K_3 &= hf(x_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{K_1}{8} + \frac{K_2}{8}) \\ K_4 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n - \frac{K_2}{2} + K_3) \\ K_5 &= hf(x_n + \frac{3h}{4}, y_n + \frac{3K_1}{16} + \frac{9K_4}{16}) \\ K_6 &= hf(x_n + h, y_n - \frac{3K_1}{7} + \frac{2K_2}{7} + \frac{12K_3}{7} \\ &\quad -\frac{12K_4}{7} + \frac{8K_5}{7}). \end{aligned} \tag{10}$$

Usando a notação matricial de Butcher o método (8) é escrito na forma

$$\begin{array}{c|cccccc} 0 & & & & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & & & \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{16} & 0 & 0 & \frac{9}{16} & & \\ 1 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{12}{7} & -\frac{12}{7} & \frac{8}{7} & \\ \hline & \frac{7}{90} & 0 & \frac{32}{90} & \frac{12}{90} & \frac{32}{90} & \frac{7}{90} \\ & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{4}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{array}$$

Aplicando o método RK-Butcher (9), (10) à equação teste (2) nós temos (5) com

$$a^*_6 = A^*_6(H^2) + iHB^*_6(H^2),$$

onde

$$\begin{aligned} A^*_6(H^2) = 1 - \tfrac{1}{2}H^2 + \tfrac{1}{21}H^4 - \tfrac{3}{896}H^6, \\ B^*_6(H^2) = 1 - \tfrac{1}{6}H^2 + \tfrac{1}{224}H^4. \end{aligned} \tag{11}$$

Agora, aplicando (11) em (7), obtemos:

$$\begin{aligned} pl^*(H) &= tan(H) - H\frac{B^*_6(H^2)}{A^*_6(H^2)} \\ &= \frac{11}{1120}H^5 + O(H^7). \end{aligned} \tag{12}$$

De (11) e da Definição 1, encontramos:

$$a^*(H) = -\frac{1}{168}H^4 + O(H^6). \tag{13}$$

Da Definição 2 e dos resultados (12) e (13), concluímos que o método RK-Butcher de ordem 4 tem ordem *phase-lag* 4 e ordem dissipativa 3.

Usando o mesmo raciocínio, analisamos, em seguida, as propriedades do método RK-Butcher de ordem algébrica 5 dado por (8) e (10). Aplicando este método à equação teste (1) obtemos

$$a_6 = A_6(H^2) + iHB_6(H^2),$$

onde

$$\begin{array}{c} A_6(H^2) = 1 - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{24}H^4 - \frac{1}{640}H^6, \\ B_6(H^2) = 1 - \frac{1}{6}H^2 + \frac{1}{120}H^4. \end{array} \tag{14}$$

e *phase-lag* igual a

$$\begin{aligned} pl(H) &= tan(H) - H\frac{B_6(H^2)}{A_6(H^2)} \\ &= -\frac{1}{2688}H^7 + O(H^9). \end{aligned} \tag{15}$$

Logo, temos que

$$a(H) = -\frac{1}{5760}H^6 + O(H^8).$$

Assim, o método de ordem 5 tem ordem *phase-lag* 6 e ordem dissipativa 5.

4 Resultados Numéricos

Apresentamos, nesta seção, os resultados numéricos obtidos pelo algoritmo RK-Butcher em um problema modelo dado pela equação

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & \phi \\ -\phi & 0 \end{bmatrix} y$$

com condição inicial $y(0) = (1\ 0)^T$. A solução exata é dada por

$$y = \begin{bmatrix} \cos(\phi x) \\ -\text{sen}(\phi x) \end{bmatrix}.$$

Na Tabela 1 apresentamos os erros absolutos máximos, no intervalo [0,10], para $\phi = 5$ e usando tamanho do passo $h = 1/8$ e $h = 1/16$, onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ representam as componentes da solução $y(x)$ e $y_{1,j}$, $y_{2,j}$ as correspondentes soluções numéricas. Observamos neste problema modelo que o método apresenta resultados satisfatórios e mostra-se adequado para problemas com soluções oscilatórias. Pretendemos aplicar o método em outros tipos de problemas oscilatórios e também fazer sua implementação usando passo variável aproveitando sua estrutura de um método embutido.

h	$\max \|y_1(x_j) - y_{1,j}\|$	$\max \|y_2(x_j) - y_{2,j}\|$
1/8	9.90129×10^{-4}	1.04902×10^{-3}
1/16	2.65702×10^{-5}	2.74461×10^{-5}

Tabela 1: erro absoluto máximo no intervalo [0,10] para h=1/8 e h=1/16

Referências

[1] L. Brusa and L. Nigro, A one step method for direct integration of structural dynamic equations, *Internat. J. Numer. Methods Eng.*, 15 (1980) 685-699.

[2] M. Bader, A new technique for the early detection of stiffness in coupled differential equations and application to standard Runge-Kutta algorithms, *Theoretical Chemistry Accounts*, 99 (1998) 215-219.

[3] M. Calvo, J.M. Franco, J.I. Montijano, L. Randéz, Explicit Runge-Kutta methods for initial value problems with oscillating solutions, *J. Comput. Appl. Math.*, 76 (1996) 195-212.

[4] M.M. Chawla, M.A. Al-Zanaid, Non-dissipative extended one-step methods for oscillatory problems, *Int. J. Comput. Math.*, 69 (1998) 85-100.

[5] K. Murugesan, S. Sekar, V. Murugesh and D.J. Evans, Numerical strategies for the system of first-order IVPs using the RK-Butcher algorithm, *Internat. J. Comput. Math.*, 82 (2005) 1379-1387.

[6] N. Senu, M. Suleiman, F. Ismail, and M. Othman, A Singly Diagonally Implicit Runge-Kutta-Nyström Method for Solving Oscillatory Problems, *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 41 (2011) 155-161.

[7] A.B. Sideridis and T.E. Simos, A low-order embedded Runge-Kutta method for periodic initial-value problems, *J. Comput. Appl. Math.*, 44 (1992) 235-244.

[8] T.E. Simos, A two-step method with phase-lag of order infinity for the numerical integration of second order periodic initial-value problems, *Internat. J. Comput. Math.*, 39 (1991) 135-140.

[9] P.J. Van der Houwen and B.P. Sommeijer, Explicit Runge-Kutta (Nystrom) methods with reduced phase errors for computing oscillating solutions, *SlAM J. Numer. Anal.*, 24 (1987) 595-617.

[10] P.J. Van der Houwen and B.P. Sommeijer, Phase-lag analysis of implicit Runge-Kutta methods, *SlAM J. Numer. Anal.*, 26 (1989) 214-229.

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0062