

Solução Numérica de Equações Diferenciais Rígidas

Willian C. Lesiniovski* Rudimar L. Nós

Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR

80230-901, Curitiba, PR

E-mail: wlesin@yahoo.com.br, rudimarnos@utfpr.edu.br

RESUMO

Este trabalho é um estudo inicial sobre a solução numérica de equações diferenciais ordinárias rígidas. Investigou-se, dentre alguns métodos numéricos de passo simples e de passo múltiplo, explícitos e implícitos, aqueles que fornecem as melhores aproximações para a solução de uma equação diferencial ordinária rígida.

Uma equação diferencial é dita rígida quando a sua solução exata tem um termo da forma e^{-ct} , onde $c \gg 0$ e $t > 0$. Este termo, que decai rapidamente para zero à medida que t aumenta, é a parte transiente da solução. A rigidez é caracterizada pela existência de duas ou mais escalas distintas para a variável independente [1, 2, 3]. Problemas de valor inicial com equações rígidas são relativamente comuns, particularmente no estudo de vibrações, reações químicas e circuitos elétricos.

Palavras-chave: *Equações diferenciais ordinárias rígidas, métodos de passo simples, métodos de passo múltiplo, métodos explícitos, métodos implícitos.*

1 Problema de Cauchy

Selecionou-se o seguinte problema de valor inicial (p.v.i.) rígido [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= \frac{5}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - 10y(t), & t \in [0, 5]; \\ y(0) &= 4; \end{aligned} \quad (1)$$

$$f_n = f(t_n, y_n) = \frac{5}{2}t_n^2 + \frac{1}{2}t_n - 10y_n; \quad (2)$$

$$y(t) = 4e^{-10t} + \frac{1}{4}t^2. \quad (3)$$

Para solucionar numericamente o p.v.i. (1), cria-se uma malha de $n + 1$ pontos do domínio da função $y(t)$, $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, e em cada ponto t_k dessa malha usa-se o valor aproximado de $y(t)$ em um ou mais pontos para calcular o valor aproximado de $y(t)$ em t_k , denotado por y_k . A diferença $t_k - t_{k-1} = h$, $k = 1, 2, \dots, n$, é o *passo de integração*, o qual, neste trabalho, é constante.

2 Métodos numéricos

Método de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

*Bolsista de Iniciação Científica PIBIC/UTFPR

Método de Euler Implícito

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{5}$$

Método de Euler Aprimorado

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{6}$$

Método de Runge-Kutta 44

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ k_{n1} &= f(t_n, y_n), \quad k_{n2} = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n1}\right) \\ k_{n3} &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n2}\right), \quad k_{n4} = f(t_n + h, y_n + hk_{n3}) \end{aligned} \tag{7}$$

Método de Adams-Bashforth

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{8}$$

Método de Adams-Moulton

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{9}$$

Os métodos (5),(6) e (9) são implícitos, pois torna-se necessário solucionar uma equação algébrica para determinar y_{n+1} ; os demais métodos são explícitos. Além disso, os métodos (8) e (9) são ditos de passo múltiplo, pois dependem de mais de um ponto anterior para calcular y_{n+1} , ao contrário dos métodos (4)-(7), de passo simples ou passo único, que dependem do ponto imediatamente anterior. Nos métodos (8) e (9), empregou-se o método (7) para calcular y_1, y_2 e y_3 . Implementou-se os métodos (4)-(9) em linguagem C [4] e utilizou-se o Matlab para visualizar os resultados (Figura 1).

3 Resultados numéricos

A Tabela (1) e a Figura (1) mostram a norma do máximo do erro absoluto cometido ($\|e\|_\infty$) e o tempo médio de processamento (t_{CPU}) dos métodos (4)-(9). Como a função que mede o tempo de processamento em C é imprecisa, para cada método e passo de integração repetiu-se o processo 1000 vezes e considerou-se a média aritmética como tempo médio.

4 Conclusões

Através da análise dos resultados obtidos, conclui-se que os métodos implícitos fornecem, em geral, aproximações melhores do que os explícitos para passos de integração maiores, o que evidencia maior região de estabilidade [1, 2, 3].

Referências

[1] W.E. Boyce; R.C. Diprima, “Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno”, 9 ed., LTC, Rio de Janeiro, 2006.

Tabela 1: Norma do máximo do erro absoluto e tempo médio de processamento na solução numérica do p.v.i. (1) empregando-se os métodos (4)-(9) com diferentes passos de integração h .

Método	$\ e\ _\infty$	t_{CPU}	$\ e\ _\infty$	t_{CPU}
	h=0,5		h=0,25	
Euler	$4,207411 \cdot 10^6$	$2,6670 \cdot 10^{-3}$	$1,332180 \cdot 10^4$	$4,7740 \cdot 10^{-3}$
Euler Implícito	$6,501315 \cdot 10^{-1}$	$2,4650 \cdot 10^{-3}$	$8,189814 \cdot 10^{-1}$	$4,7110 \cdot 10^{-3}$
Euler Aprimorado	$1,741238 \cdot 10^0$	$2,5120 \cdot 10^{-3}$	$7,727844 \cdot 10^{-1}$	$4,7740 \cdot 10^{-3}$
Runge-Kutta 44	$9,403616 \cdot 10^{11}$	$2,9010 \cdot 10^{-3}$	$2,270496 \cdot 10^0$	$4,6960 \cdot 10^{-3}$
Adams-Bashforth	$2,412668 \cdot 10^{11}$	$2,9950 \cdot 10^{-3}$	$2,788496 \cdot 10^{12}$	$5,8810 \cdot 10^{-3}$
Adams-Moulton	$6,064083 \cdot 10^3$	$2,6320 \cdot 10^{-3}$	$2,270496 \cdot 10^0$	$4,8900 \cdot 10^{-3}$
	h=0,125		h=0,0625	
Euler	$2,149925 \cdot 10^0$	$8,7510 \cdot 10^{-3}$	$6,420223 \cdot 10^{-1}$	$1,7254 \cdot 10^{-2}$
Euler Implícito	$6,334947 \cdot 10^{-1}$	$9,1570 \cdot 10^{-3}$	$3,697445 \cdot 10^{-1}$	$1,8111 \cdot 10^{-2}$
Euler Aprimorado	$2,229423 \cdot 10^{-1}$	$9,1890 \cdot 10^{-3}$	$4,851352 \cdot 10^{-2}$	$1,8096 \cdot 10^{-2}$
Runge-Kutta 44	$8,395747 \cdot 10^{-2}$	$9,2360 \cdot 10^{-3}$	$3,087647 \cdot 10^{-3}$	$1,8111 \cdot 10^{-2}$
Adams-Bashforth	$1,002599 \cdot 10^{17}$	$1,2090 \cdot 10^{-2}$	$7,483143 \cdot 10^{15}$	$2,2761 \cdot 10^{-2}$
Adams-Moulton	$8,395747 \cdot 10^{-2}$	$9,3570 \cdot 10^{-3}$	$3,087647 \cdot 10^{-3}$	$1,8617 \cdot 10^{-2}$
	h=0,03125		h=0,015625	
Euler	$2,671452 \cdot 10^{-1}$	$3,4429 \cdot 10^{-2}$	$1,234184 \cdot 10^{-1}$	$6,8312 \cdot 10^{-2}$
Euler Implícito	$2,031526 \cdot 10^{-1}$	$3,6020 \cdot 10^{-2}$	$1,081811 \cdot 10^{-1}$	$7,1916 \cdot 10^{-2}$
Euler Aprimorado	$1,208219 \cdot 10^{-2}$	$3,5958 \cdot 10^{-2}$	$2,995835 \cdot 10^{-3}$	$7,1963 \cdot 10^{-2}$
Runge-Kutta 44	$1,519257 \cdot 10^{-4}$	$3,6083 \cdot 10^{-2}$	$8,331014 \cdot 10^{-6}$	$7,2072 \cdot 10^{-2}$
Adams-Bashforth	$3,199923 \cdot 10^{-2}$	$3,6894 \cdot 10^{-2}$	$2,472590 \cdot 10^{-4}$	$7,3320 \cdot 10^{-2}$
Adams-Moulton	$2,105729 \cdot 10^{-4}$	$3,6809 \cdot 10^{-2}$	$1,741384 \cdot 10^{-5}$	$7,3229 \cdot 10^{-2}$

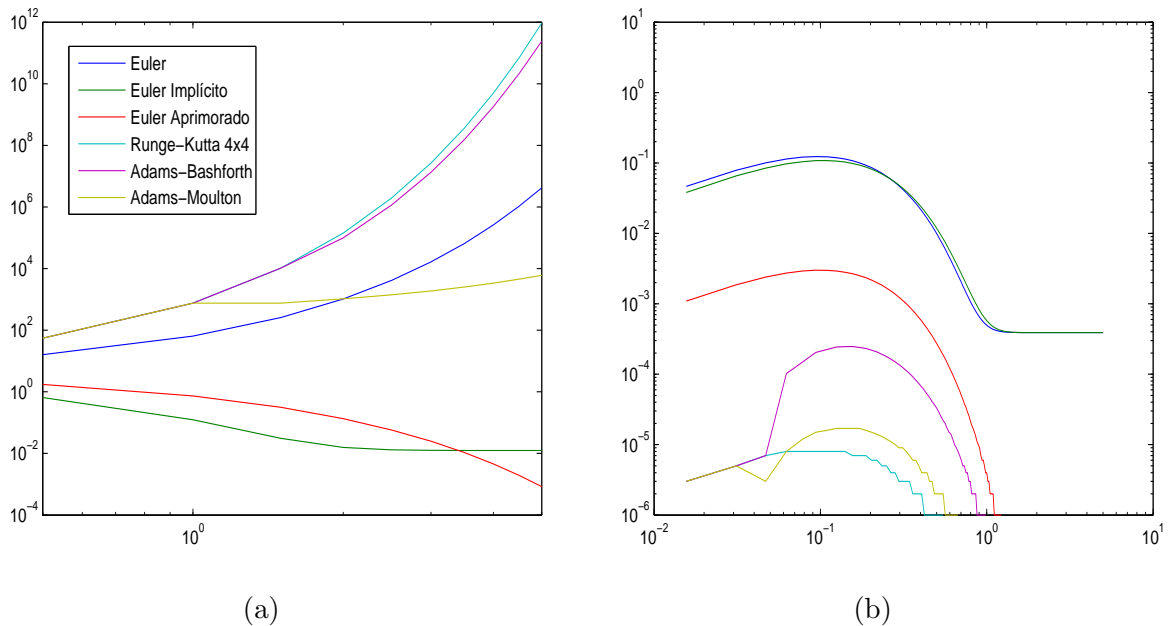


Figura 1: Norma do máximo do erro absoluto cometido na solução numérica do p.v.i. (1) empregando-se os métodos (4)-(9) com os seguintes passos de integração: (a) 0,5; (b) 0,015625.

[2] R.L. Burden; J.D. Faires, “Numerical analysis”, 9th ed., Brooks/Cole, Boston, 2011.
 [3] A.M. Roma, R.L. Nós, “Tratamento numérico de equações diferenciais - Notas de aula”, IME-USP, São Paulo, 2012.
 [4] H. Schildt, “C Completo e total”, Makron Books, São Paulo, 1996.