

Solução do Problema de Deflexão de Vigas com o Método das Diferenças Finitas

Gabrielle Piezzoti Oliveira*

Coordenação de Ciência da Computação, COCIC, UTFPR
80230-901, Campus Campo Mourão, Campo Mourão, PR
E-mail: gabrielle793@hotmail.com

Viviane Colucci Adilandri Mércio Lobeiro

Departamento de Matemática, DAMAT, UTFPR
80230-901, Campus Campo Mourão, Campo Mourão, PR
E-mail: colucci@utfpr.edu.br, alobeiro@utfpr.edu.br

Clicia Geovana Alves Pereira

Departamento de Ciências, UEM
87360-000, Campus Goioerê, Goioerê, PR
E-mail: cgapereira2@uem.br

RESUMO

Este trabalho trata da obtenção das soluções analítica e numérica de um Problema de Valor de Contorno (PVC) para o problema de Deflexão de Vigas.

Em particular, considera-se uma viga bi-apoiada de seção transversal retangular, de modo que as extremidades não sofrem deflexão, com uma carga uniformemente distribuída sobre ela, como apresentada na Figura 1.

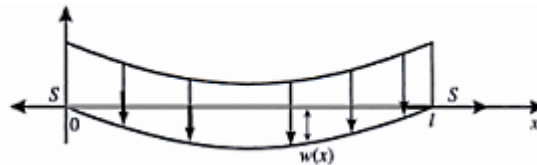


Figura 1: Viga com extremidades apoiadas, sujeita a carga uniforme

A Equação Diferencial Ordinária Linear que aproxima o caso à situação física é dada por:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{S}{EI}w + \frac{qx}{2EI}(x - l),$$

onde $w(x)$ é a deflexão a uma distância x a partir da extremidade esquerda da viga, l representa o comprimento da viga, q a intensidade de carga uniforme a que está submetida, E o módulo da elasticidade, S o esforço nas extremidades e I representa o momento de inércia central.

Como não há deflexão nas extremidades da viga, vale as condições: $w(0) = 0$ e $w(l) = 0$.

Para um estudo de caso, considera-se uma viga de aço com as seguintes características:

$$l = 120\text{pol}, \quad q = 100\text{lb/pé} = \frac{100}{12}\text{lb/pol}, \quad E = 3,0 \times 10^7\text{lb/pol}^2, \quad S = 1000\text{lb} \quad \text{e} \quad I = 625\text{pol}^4.$$

*bolsista de Iniciação Científica PICME, CNPq/Capes

Obtém-se então o Problema de Valor de Contorno (PVC)

$$\begin{cases} \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1.0 \cdot 10^{-4}}{1875} w = \frac{1.0 \cdot 10^{-9}}{4.5} (x^2 - 120x) \\ w(0) = 0 \text{ e } w(120) = 0 \end{cases},$$

cuja solução analítica é dada por

$$w(x) = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx} + c_3 x^2 + c_4 x + c_5,$$

onde $c_1 = \frac{(\frac{5}{32} \cdot 10^6)(1 - e^{-2\sqrt{3}/125})}{e^{2\sqrt{3}/125} - e^{-2\sqrt{3}/125}}$, $c_2 = \frac{(\frac{5}{32} \cdot 10^6)(e^{2\sqrt{3}/125} - 1)}{e^{2\sqrt{3}/125} - e^{-2\sqrt{3}/125}}$, $m = \frac{\sqrt{3}}{7500}$, $c_3 = \frac{-1}{240}$, $c_4 = \frac{1}{2}$ e $c_5 = -\frac{5}{32} \cdot 10^6$.

Para obter a solução numérica do PVC, foi aplicado o método das Diferenças Finitas, substituindo-se as derivadas da equação pelas fórmulas de diferenças centrais [1]

$$\begin{cases} -w_{i-1} + \left(2 + h^2 \left(\frac{1.0 \cdot 10^{-4}}{1875}\right)\right) w_i - w_{i+1} = -h^2 \left(\frac{1.0 \cdot 10^{-9}}{4.5}\right) (x^2 - 120x) \\ w_0 = 0 \text{ e } w_{N+1} = 0 \end{cases},$$

obtendo um sistema linear de equações, para i variando de 1 até N .

Dividiu-se o intervalo $[0, 120]$ (comprimento da viga) em 1200 subintervalos iguais, cujas extremidades são os pontos da malha $x_i = ih$, para $i = 0, \dots, 1201$, sendo $h = 0,1$ (passo), para os quais busca-se a aproximação w_i . Quanto mais discretizado o intervalo, mais precisas são as aproximações. No entanto, tendo em vista o custo computacional e que a discretização aplicada foi suficiente para se obter um resultado satisfatório, não foi necessário um passo menor.

A forma matricial do sistema gerado trabalha com uma matriz de coeficientes tridiagonal 1199×1199 .

O código em MATLAB a seguir implementa o método e resolve o sistema.

Código 1: Solução Numérica de um PVC com o Método de Diferenças Finitas

```
syms x

%w'' = p(x)w' + q(x)w + r(x), [a,b]
dados = inputdlg({'P: ', 'Q: ', 'R: ', 'n: '}, 'Dados');
limites = inputdlg({'a: ', 'f(a): ', 'b: ', 'f(b): '}, 'PVC');
passo = (str2num(limites{3}) - str2num(limites{1}))/str2num(dados{4});
xVector = str2num(limites{1}) : passo : str2num(limites{3});

%Sistema matricial: Aw = d. Obtendo a matriz tridiagonal A:
a(1) = 2 + (passo^2)*subs(dados{2},x,xVector(2)); %diagonal principal
b(1) = -1 + (passo/2)*subs(dados{1},x,xVector(2)); %diagonal superior
d(1) = -(passo^2)*subs(dados{3},x,xVector(2)) + ((1 + (passo/2)*subs(
    dados{1},x,xVector(2)))*str2num(limites{2}));
for i = 2: length(xVector)-3
    a(i) = 2 + (passo^2)*subs(dados{2},x,xVector(i+1));
    b(i) = -1 + (passo/2)*subs(dados{1},x,xVector(i+1));
    c(i) = -1 - (passo/2)*subs(dados{1},x,xVector(i+1)); %inferior
    d(i) = -(passo^2)*subs(dados{3},x,xVector(i+1));
end
a(i+1) = 2 + (passo^2)*subs(dados{2},x,xVector(i+2));
c(i+1) = -1 - (passo/2)*subs(dados{1},x,xVector(i+2));
d(i+1) = -(passo^2)*subs(dados{3},x,xVector(i+2)) + ((1 - (passo/2)*subs(
    dados{1},x,xVector(i+2)))*str2num(limites{4}));

%Fatoração LU
l(1) = a(1);
u(1) = b(1)/a(1);
z(1) = d(1)/l(1);
for i = 2: length(xVector)-3
    l(i) = a(i) - (c(i)*u(i-1));
```

```

    u(i) = b(i)/l(i);
    z(i) = (d(i) - (c(i)*z(i-1)))/l(i);
end
l(i+1) = a(i+1) - (c(i+1)*u(i));
z(i+1) = (d(i+1) - (c(i+1)*z(i)))/l(i+1);

%Resolvendo o sistema
w(1) = str2num(limites{2});
w(length(xVector)) = str2num(limites{4});
w(length(xVector)-1) = z(length(xVector)-2);

for i = length(xVector)-2: -1 : 2
    w(i) = z(i-1) - (u(i-1)*w(i+1));
end

```

A Figura 2 apresenta os gráficos de ambas as soluções.

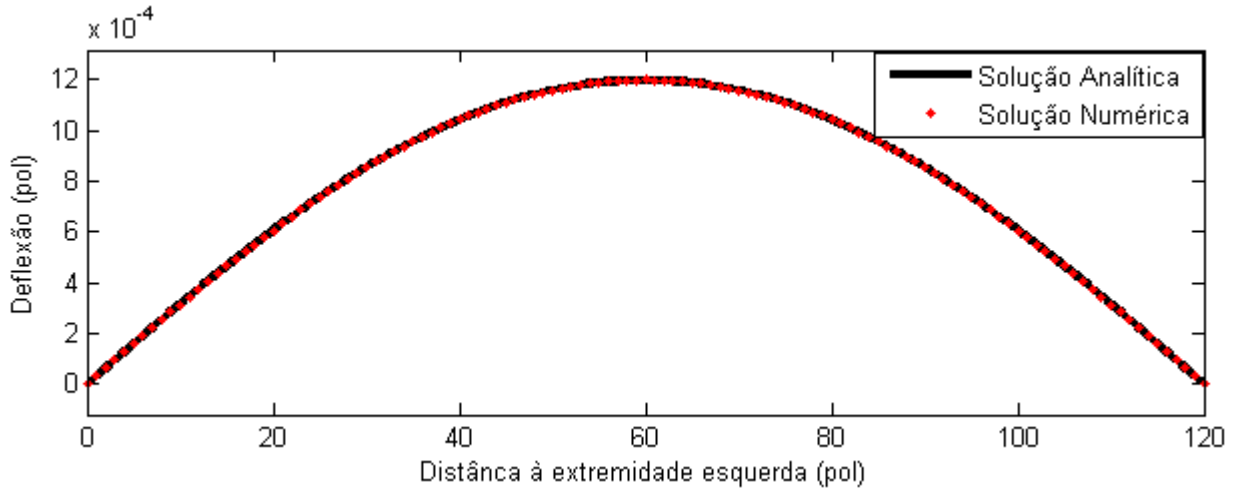


Figura 2: Soluções Gráficas

Com as soluções gráficas fica visível a proximidade entre os resultados. A Tabela a seguir exemplifica alguns dos valores encontrados, também para facilitar a comparação entre as soluções.

| x_i | $w(x_i)$ | w_i | Erro absoluto | Erro percentual |
|-------|--------------|--------------|---------------|-----------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 0.0006073605 | 0.0006073609 | 0.0000000004 | 0.0000658587 |
| 40 | 0.0010428818 | 0.0010428824 | 0.0000000006 | 0.0000575329 |
| 60 | 0.0011999063 | 0.0011999070 | 0.0000000007 | 0.0000583379 |
| 80 | 0.0010428818 | 0.0010428824 | 0.0000000006 | 0.0000575329 |
| 100 | 0.0006073605 | 0.0006073609 | 0.0000000004 | 0.0000658587 |
| 120 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabela 1: Resultados e Erros

Pode-se concluir, pela ordem de magnitude dos erros, que ficou entre 0.00005% e 0.00007%, a eficácia do método numérico.

Palavras-chave: *Equação Diferencial Ordinária, Solução Numérica, Diferenças Finitas, Deflexão de Vigas*

Referências

[1] R.L. Burden, J.D. Faires, *Análise Numérica*, Cengage Learning, 2008.